KLAUSUR

Fourier- und Laplacetheorie

22.9.2010

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Versuch–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und T eine Distribution. Als Produkt der Funktion f mit der Distribution T bezeichnet man die Distribution, die auf Testfunktionen durch die Vorschrift wirkt:

$$f\,T : \phi \longrightarrow T(f\,\phi)\,.$$

Berechnen Sie das Produkt einer Funktion f mit der Ableitung der Delta-Funktion: $f\,T'_\delta$. Was ergibt sich im Sonderfall $f(0) = 0\,, f'(0) = 0$?
(8P)

2. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme mit der Laplacetransformation:

$$y'' - 2\,y' + y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, y'(0) = 0\,,$$

$$y'' - 2\,y' + y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0\,,$$

mit einer zweimal stetig differenzierbaren rechten Seite von exponentieller Ordnung $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$.
(8P)

3. Die Folge $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ besitze die z-Transformierte $\mathcal{Z}(f_n)(z) = F(z)$, $|z| > |a|$. Gesucht wird die Folge $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit der z-Transformierten:

$$\mathcal{Z}(g_n)(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^2}\,, \quad |z| > |a|\,.$$

Hinweis: Die Folge

$$h_n = \begin{cases} 0 & , \quad n = 0\,, \\ a^{n-1} & , \quad n \geq 1\,. \end{cases}$$

stellt die Rücktransformierte des Pols dar:

$$\mathcal{Z}(h_n)(z) = \frac{1}{z-a}\,, \quad |z| > |a|\,.$$

(8P)

Lösungen:

1) Es gilt:

$$(T_\delta)'(\phi) = -T_\delta(\phi') = -\phi'(0)\,.$$

Formal kann man so schreiben:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,\phi(t)\,dt = \delta(t)\,\phi(t)|_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\phi'(t)\,dt = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\phi'(t)\,dt\,.$$

Durch Multiplikation ergibt sich nun:

$$(f\,(T_\delta)')(\phi) = -T_\delta((f\,\phi)') - (f\,\phi)'(0) = -f(0)\,\phi'(0) - f'(0)\,\phi(0)\,.$$

Man kann dafür auch schreiben:

$$f\,T_\delta' = f(0)\,T_\delta' - f'(0)\,T_\delta\,.$$

Wir bekommen folgenden Sonderfall:

$$f(0) = 0\,, \quad f'(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f\,T_\delta' = 0\,.$$

2) Wir überführen die Differentialgleichung mit $\mathcal{L}(y(t))(s) = Y(s)$ in den Bildbereich und erhalten:

$$s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - 2\,(s\,Y(s) - y(0)) + Y(s) = 0\,.$$

Unter Beachtung der Anfangsbedingungen können wir diese Gleichung wie folgt umschreiben:

$$s^2\,Y(s) - s - 2\,(s\,Y(s) - 1) + Y(s) = 0\,,$$

bzw.

$$(s^2 - 2\,s + 1)\,Y(s) = s - 2\,.$$

Die Lösung $Y(s)$ lautet:

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2 - 2\,s + 1} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}\,, \quad \Re(s) > 1\,,$$

und die Rücktransformation liefert:

$$y(t) = e^t\,(1-t)\,.$$

Wenden wir wieder auf beiden Seiten die Laplacetransformation an und beachten die Anfangsbedingung, so erhalten wir im Bildbereich die Gleichung:

$$s^2\,Y(s) - 2\,s\,Y(s) + Y(s) = F(s)$$

mit $\mathcal{L}(y(t))(s) = Y(s)$ und $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$. Die Auflösung ergibt:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}\,F(s)\,.$$

Anwendung des Faltungssatzes ergibt:

$$y(t) = \int\limits_0^t \tau\,e^{\tau}\,f(t-\tau)\,d\tau\,.$$

3.) Mit dem Faltungssatz bekommen wir zuerst: $\rho_0 = 0$ und für $n \geq 1$:

$$\rho_n = f_n * h_n = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu\,h_{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu\,a^{n-\nu-1} = a^n \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu\,a^{-\nu-1}\,.$$

Eine weitere Faltung ergibt: $g_0 = 0$ und für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
g_n &= \rho_n * h_n = \sum_{\nu=1}^{n-1} \rho_\nu\,h_{n-\nu} \\
&= \sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1} f_\mu\,a^{\nu-\mu-1}\;a^{n-\nu-1} \\
&= a^{n-2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1} f_\mu\,a^{-\mu} \\
&= (n-1)\,f_0\,a^{n-2} + (n-2)\,f_1\,a^{n-3} + (n-3)\,f_2\,a^{n-4} + \cdots + f_{n-2}\,a^0\,.
\end{aligned}$$

Verwendet man die Rücktransformierte

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & , \quad n = 0\,, \\ (n-1)\,a^{n-2} & , \quad n \geq 2\,. \end{cases}$$

des Pols:

$$\mathcal{Z}(\sigma_n)(z) = \frac{1}{(z-a)^2}\,, \quad |z| > |a|\,,$$

und faltet mit f_n, dann ergibt sich dasselbe Resultat.