KLAUSUR

Fourier- und Laplacetheorie

31.3.2011

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die Funktion: $f(t) = t\,, \quad 0 \leq t < 1\,.$ Setzen Sie f sowohl gerade als auch ungerade 2-periodisch fort, und geben Sie jeweils die Fourierreihe an. Integrale für die Koeffizienten genügen.
6P

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}$ absolut integrierbar, stetig und stückweise glatt. Man bezeichnet:

$$a(\omega) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \cos(\omega\, t)\, dt\,, \quad b(\omega) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \sin(\omega\, t)\, dt\,,$$

als Cosinus- bzw. Sinus-Spektrum von f. Zeigen Sie mit dem Fourierintegraltheorem:

$$f(t) = 2 \int\limits_{0}^{\infty} (a(\omega) \cos(\omega\, t) + b(\omega) \sin(\omega\, t))\, d\omega\,.$$

6P

3. Gegeben seien die Reihenentwicklungen:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{z^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

(a) Geben Sie die z-Transformierte der Folge $f_n = \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$, an.
(b) Geben Sie das Urbild der Funktion $\sin(\frac{1}{z})$ unter der z-Transformation an.
6P

Lösungen

1.) Durch gerade Fortsetzung von f entsteht eine gerade Funktion f_g mit der Periode 2, die in eine Cosinusreihe entwickelt wird:

$$f_g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \, \cos\left(j\,\pi\,t\right) \, ,$$

mit $a_j = 2 \int\limits_0^1 t \, \cos(j\,\pi\,t)\,dt$. Auswerten der Integrale ergibt:

$$\begin{aligned} f_g(t) &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\,\cos(\pi\,t) - \frac{4}{9\,\pi^2}\,\cos(3\,\pi\,t) \\ &\quad - \frac{4}{25\,\pi^2}\,\cos(5\,\pi\,t) - \frac{4}{49\,\pi^2}\,\cos(7\,\pi\,t) \cdots \, . \end{aligned}$$

Durch ungerade Fortsetzung von f entsteht eine ungerade Funktion f_u mit der Periode 2, die in eine Sinusreihe entwickelt wird:

$$f_u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \, \sin\left(j\,\pi\,t\right) \, ,$$

mit

$$b_j = 2 \int\limits_0^1 t \, \sin(j\,\pi\,t)\,dt \, .$$

Auswerten der Integrale ergibt:

$$\begin{aligned} f_u(t) &= \frac{2}{\pi}\,\sin(\pi\,t) - \frac{1}{\pi}\,\sin(2\,\pi\,t) \\ &\quad + \frac{2}{3\,\pi}\,\sin(3\,\pi\,t) - \frac{2}{5\,\pi}\,\sin(4\,\pi\,t) \\ &\quad + \frac{2}{5\,\pi}\,\sin(5\,\pi\,t) - \frac{1}{6\,\pi}\,\sin(6\,\pi\,t) \cdots \, . \end{aligned}$$

2.) Wir haben folgende Rekonstruktion:

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\,\omega\,\xi}\, d\xi \right) \, e^{i\,\omega\,t}\, d\omega \, .$$

Umformen ergibt:

$$f(t) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,(\cos(\omega\,\xi) - \sin(\omega\,\xi)\,i)\,d\xi \right)\,(\cos(\omega\,t) + \sin(\omega\,t)\,i)\,d\omega\,.$$

Wir zerlegen den Integranden wie folgt:

$$\begin{aligned} f(t) \quad = \quad & \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\cos(\omega\,\xi)\,d\xi \right) \cos(\omega\,t)\,d\omega \\ & + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\sin(\omega\,\xi)\,d\xi \right) \sin(\omega\,t)\,d\omega \\ & + \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\cos(\omega\,\xi)\,d\xi \right) \sin(\omega\,t)\,d\omega \right) i \\ & - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\sin(\omega\,\xi)\,d\xi \right) \cos(\omega\,t)\,d\omega \right) i\,. \end{aligned}$$

Da die Funktion $a(\omega)$ gerade ist und die Funktion $b(\omega)$ ungerade, verschwindet der dritte und der vierte Summand:

$$A(\omega) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\cos(\omega\,\xi)\,d\xi\,, \quad B(\omega) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\sin(\omega\,\xi)\,d\xi\,.$$

3.a)

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,z^{-n}\,, \quad |z| > 0\,.$$

3.b)

$$\sin(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{1}{(2\,n+1)!}\,z^{-2\,n-1}\,, \qquad |z| > 0\,.$$

Die Urbildfolge lautet:

$$f_n = 0\,, \quad n = 0, 2, 4, ... \quad f_n = (-1)^n\,\frac{1}{(2\,n+1)!}\,, \quad n = 1, 3, 5, ... \quad .$$