KLAUSUR

Fourier- und Laplacetheorie

14.7.1998

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 11 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Man schreibe das trigonometrische Polynom

$$p_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos(j\,\omega\,t) + b_j \sin(j\,\omega\,t))$$

in der Form

$$p_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} c_j\, e^{j\,\omega\,t\,i}\,.$$

(4P)

2. Man berechne die Fourierreihe $\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{r,j}\, e^{j\,\omega\,t\,i}$ der Funktion:

$$r(t) = t^2\,, \quad -\pi \le t \le \pi\,.$$

Mit dem Ansatz $y(t) = \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{y,j}\, e^{j\,\omega\,t\,i}$ gebe man eine Lösung der folgenden Differentialgleichung an:

$$y'' - \frac{1}{2}\, y = r(t)$$

(6P)

3. Man berechne die Fouriertransformierte der Funktionen:

(a)

$$f(t) = e^{-|t|}\,.$$

(b)

$$f(t) = 1\,, \quad \text{für} \quad |t| \le \frac{T}{2} \quad \text{und} \quad 0 \quad \text{sonst.}$$

(6P)

4. Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = t\,, t \ge 0\,, \quad f(t) = 0\,, t < 0\,.$$

Man betrachte die zugeordnete reguläre Distribution T_f und berechne ihre erste und zweite Ableitung.
(6P)

Lösungen

1.) Es gilt:

$$\begin{aligned}\cos(j\,\omega\,t) &= \frac{e^{j\,\omega\,t\,i}+e^{-j\,\omega\,t\,i}}{2}\,,\\ \sin(j\,\omega\,t) &= -i\,\frac{e^{j\,\omega\,t\,i}-e^{-j\,\omega\,t\,i}}{2}\,.\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}p_n(t) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{n} a_j\,\frac{e^{j\,\omega\,t\,i}+e^{-j\,\omega\,t\,i}}{2}\\ &\quad +\sum_{j=1}^{n} a_j\,(-i)\,\frac{e^{j\,\omega\,t\,i}-e^{-j\,\omega\,t\,i}}{2}\\ &= \frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{n}(a_j-i\,b_j)\,\frac{e^{j\,\omega\,t\,i}}{2}\\ &\quad +\sum_{j=-1}^{-n}(a_{-j}+i\,b_{-j})\,\frac{e^{j\,\omega\,t\,i}}{2}\,.\end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{a_0}{2}\,,\\ c_j &= \frac{a_j-i\,b_j}{2}\,,\quad j=1\,,\ldots\,,n\,,\\ c_j &= \frac{a_{-j}+i\,b_{-j}}{2}\,,\quad j=-1\,,\ldots\,,-n\,,\end{aligned}$$

so ergibt sich:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{n}(a_j\,\cos(j\,\omega\,t)+b_j\,\sin(j\,\omega\,t))=\sum_{j=-n}^{n} c_j\,e^{j\omega\,t\,i}\,.$$

2.) Da $r(t)$, $t\in[-\pi,\pi]$ eine gerade Funktion darstellt, wird r mit $T=2\pi$ und $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=1$ in eine Cosinus-Reihe entwickelt:

$$r(t)=\frac{a_{r,0}}{2}+\sum_{j=1}^{\infty} a_{r,j}\,\cos(j\,t)\,,$$

wobei

$$a_{r,j} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi t^2 \, \cos(j\,t)\,dt\,.$$

Die Koef£zienten können sofort berechnet werden:

$$\begin{aligned} a_{r,0} &= \frac{2}{3}\,\pi^2\,, \\ a_{r,j} &= \frac{2}{\pi}\,\left(\frac{2\,j\,t\,\cos(j\,t) - 2\,\sin(j\,t) + j^2\,t^2\,\sin(j\,t}{j^3}\right)\Bigg|_0^\pi \\ &= (-1)^j\,\frac{4}{j^2}\,, \quad j \geq 1\,, \end{aligned}$$

und wir bekommen

$$r(t) = \frac{1}{3}\,\pi^2 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j\,\frac{4}{j^2}\,\cos(j\,t)\,,$$

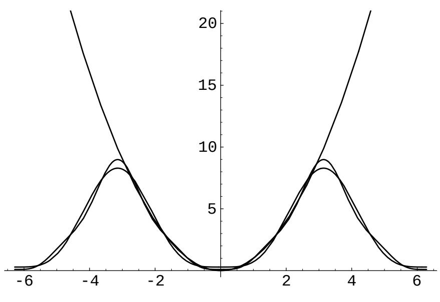
bzw.

$$r(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{r,j}\,e^{j\,\omega\,t\,i}$$

mit

$$\begin{aligned} c_{r,0} &= \frac{1}{3}\,\pi^2 \\ c_{r,j} &= (-1)^j\,\frac{2}{j^2}\,, \quad j \neq 0\,. \end{aligned}$$

(Die Fouriereihe konvergiert gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$).



Die Funktion $r(t) = t^2$ und die Teilsummen ihrer Fourierreihe für $n = 2$ und $n = 4$ gezeichnet im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$

Wir machen nun den folgenden Ansatz für eine Lösung

$$y(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{y,j}\,e^{j\,\omega\,t\,i}\,.$$

Formal erhält man nach dem Differentiatitionssatz:

$$y''(t) = -\sum_{j=-\infty}^{\infty} j^2 c_{y,j}\, e^{j\,\omega\, t\, i}$$

und damit durch Einsetzen in die Differenzialgleichung:

$$-\sum_{j=-\infty}^{\infty} -j^2 c_{y,j}\, e^{j\,\omega\, t\, i} - \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{y,j}\, e^{j\,\omega\, t\, i} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{r,j}\, e^{j\,\omega\, t\, i}\,.$$

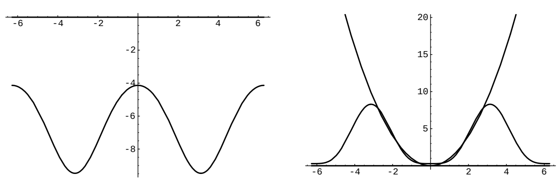
Aus dieser Bedingung ergeben sich zunächst formal folgende Koef£zienten:

$$c_{y,j} = -\frac{c_{r,j}}{j^2 + \frac{1}{2}} = -2\,\frac{c_{r,j}}{2\,j^2 + 1}\,.$$

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass alle Reihen von der Fourierreihe von r majorisiert werden und somit absolut konvergieren. Wir bekommen schließlich die Cosinus-Reihe

$$y(t) = -\frac{2}{3}\,\pi^2 - \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\,\frac{8}{j^2\,(2\,j^2+1)}\,\cos(j\,t)$$

als Lösung.



Eine Teilsumme der Fourierreihe von $y(t)$ (links) und $r(t)$ mit einer Teilsumme der Fourierreihe von $y''(t) - \frac{1}{2}y(t)$ (rechts) gezeichnet im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$. Bei den Teilsummen wird jeweils $n = 2$ gewählt.

Die Differentialgleichung kann mit der Ansatzmethode oder durch Variation der Konstanten gelöst werden:

$$y(t) = \gamma_1\,\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,t\right) + \gamma_2\,\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,t\right) + 2\,t^2 - 8$$

mit beliebigen Konstanten γ_1, γ_2. Die Methode der Fourierreihen greift aus der allgemeinen Lösung nun diejenige heraus, welche die periodischen Randbedingungen

$$y(-\pi) = y(\pi)\,, \quad y'(-\pi) = y'(\pi)\,,$$

erfüllt.

3.a) Wir berechnen de£nitionsgemäß:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-\omega\,t\,i}\,dt \\
&= \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\,e^{-\omega\,t\,i}\,dt + \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-\omega\,t\,i}\,dt \\
&= \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{t}\,e^{-\omega\,t\,i}\,dt + \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}\,e^{-\omega\,t\,i}\,dt \\
&= \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{1}{1-\omega\,i}\;\left. e^{t-\omega\,t\,i}\right|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{1}{-1-\omega\,i}\;\left. e^{-t-\omega\,t\,i}\right|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{1}{1-\omega\,i} + \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{1}{1+\omega\,i} \\
&= \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+\omega^2}\,.
\end{aligned}$$

3.b) Wir berechnen de£nitionsgemäß:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-\omega\,t\,i}\,dt \\
&= \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\omega\,t\,i}\,dt \\
&= -\frac{1}{2\,\pi}\,\frac{1}{\omega\,i}\;\left. e^{-\omega\,t\,i}\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{1}{2\,\pi\,\omega\,i}\left(e^{-\omega\,\frac{T}{2}\,i} - e^{\omega\,\frac{T}{2}\,i}\right) \\
&= -\frac{1}{2\,\pi\,\omega\,i}\left(2\,i\,\sin\left(\omega\,\frac{T}{2}\right)\right) \\
&= \frac{T}{2\,\pi}\,\frac{\sin\left(\omega\,\frac{T}{2}\right)}{\omega\,\frac{T}{2}}\,.
\end{aligned}$$

4.) Die f zugeordnete reguläre Distribution wirkt auf Testfunktionen ϕ vermöge:

$$T_f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi(t)\,dt = \int_0^{\infty} t\,\phi(t)\,dt\,.$$

Nach De£nition der Ableitung von Distributuionen ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
T_f'(\phi) &= -T_f(\phi') \\
&= -\int_0^{\infty} t\,\phi'(t)\,dt \\
&= -t\,\phi(t)|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \phi(t)\,dt \\
&= \int_0^{\infty} \phi(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\cdot\phi(t)\,dt + \int_0^{\infty} 1\cdot\phi(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\phi(t)\,dt \\
&= T_u(\phi)\,.
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet u die Heavisidesche Sprungfunktion.

Genauso berechnen wir (mit $\lim_{t\to\pm\infty} \phi(t) = 0$):

$$\begin{aligned}
T_f''(\phi) &= T_u'(\phi) = -T_u(\phi') \\
&= -\int_0^{\infty} \phi'(t)\,dt \\
&= -\phi'(t)|_0^{\infty} \\
&= \phi(0) \\
&= T_\delta(\phi)\,.
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet δ die Diracsche Delta-Funktion.