KLAUSUR

Mathematik I/II für Elektrotechniker

10.3.2000

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sind die komplexen Zahlen $a = -1 - i$ und $b = -1 + i$.

   (a) Man stelle die Zahlen a, b und b^7 in Polarkoordinaten dar und skizziere ihre Lage in der komplexen Ebene.

   (b) Man berechne die Lösungen der Gleichung $z^4 = a$ und skizziere ihre Lage in der komplexen Ebene.

   (4P)

2. (a) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und es sei $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$. Man berechne die Ableitung der Funktion

   $$f(x) = g(x)\cos(x + g(x))$$

   und gebe den Wert $f'(0)$ an.

   (b) Man berechne die Ableitung der Funktion

   $$f(x) = \int\limits_{\cos(x)}^{0} e^{-t^2}\,dt$$

   und gebe den Wert $f'(0)$ an.

   (4P)

3. Man entwickle die Funktion:

   $$f(x) = x^2\,e^x - (e^x - 1)^2$$

   in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$. (Welches Vorzeichen besitzen die Entwicklungskoeffizienten?)
   (6P)

4. Man bestimme eine Stammfunktion für

   $$f(x) = \cos(e^x)\,e^{2\,x}\,.$$

   Hinweis: Substitution von $t = e^x$ in $\int f(x)dx$ dann Produktintegration.
   (4P)

5. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} .$$

   (a) Man bestimme den Rang der Matrix A und die Dimension des Lösungsraumes des homogenen Systems $A\vec{x}^T = \vec{0}$.

   (b) Mit dem Gaußschen Algorithmus bestimme man sämtliche Lösungen des inhomogenen Systems $A\vec{x}^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (4P)

6. (a) Durch

$$g : (r, \phi, z) \quad \longrightarrow \quad (r\cos(\phi), r\sin(\phi), z)$$

   wird eine differenzierbare Abbildung des $\mathbb{R}^3$ in sich gegeben. Man berechne die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial g}{\partial(r, \phi, z)} \right)$$

   und ihre Determinante.

   (b) Die Vektoren $(a, 0, 0)$ und $(0, 0, a)$ mit $a > 0$ spannen ein Dreieck in der $x_1 - x_3$–Ebene im $\mathbb{R}^3$ auf. Durch Rotation dieses Dreiecks um die x_3-Achse entsteht eine Teilmenge $\tilde{D}$ des $\mathbb{R}^3$. Mit Hilfe der Substitutionsregel

$$\int\limits_{g(D)} f(x)dx = \int\limits_{D} f(g(r, \phi, z)) \left| \det \left(\frac{\partial g}{\partial(r, \phi, z)} \right) \right| d(r, \phi, z)$$

   berechne man das Integal

$$\int\limits_{\tilde{D}} (x_1^2 + x_2^2)dx \, .$$

   (6P)

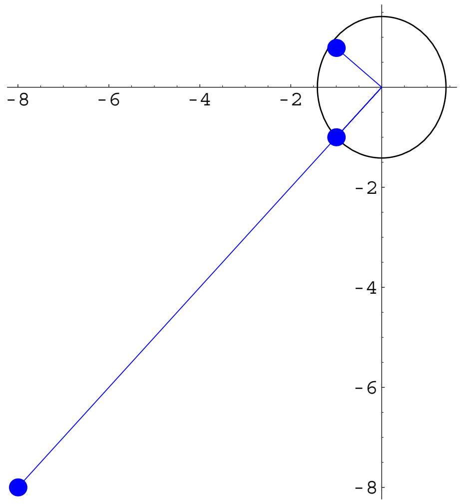
Lösungen

1.)
(a) Es gilt offenbar:

$$a = \sqrt{2}\, e^{-\frac{3}{4}\pi i}, \quad b = \sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} b^7 &= (\sqrt{2})^7\, e^{\frac{21}{4}\pi i} \\ &= 2^3 \sqrt{2}\, e^{\frac{5}{4}\pi i}\, e^{4\pi i} \\ &= 8\sqrt{2}\, e^{-\frac{3}{4}\pi i} \\ &= 8\,a\,. \end{aligned}$$



Die Zahlen
$a = -1 - i$, $b = -1 + i$ und b^7
in der Gaußschen Ebene

(b) Die Gleichung

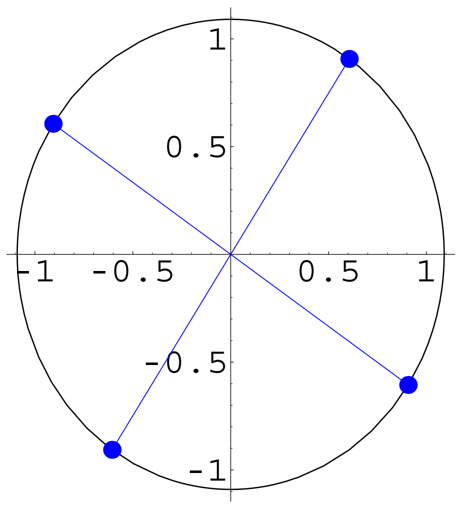
$$z^4 = \sqrt{2}\; e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$

besitzt folgende vier Lösungen:

$$z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{3}{16}\pi i + (k-1)\frac{2}{4}\pi i}, \quad k = 1, 2, 3, 4\,.$$

Das heißt:

$$z_k = 2^{\frac{1}{8}}\; e^{-\frac{3}{16}\pi i + (k-1)\frac{1}{2}\pi i}, \quad k = 1, 2, 3, 4\,.$$



Die vier Wurzeln der Gleichung
$z^4 = -1 - i$
in der Gaußschen Ebene

2.)
(a) Mit der Produktregel und der Kettenregel folgt:

$$f'(x) = g'(x)\,\cos(x + g(x)) - g(x)\,\sin(x + g(x))\,(1 + g'(x))\,.$$

Setzt man nun noch $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$ ein, so ergibt sich:

$$f'(0) = 1\,.$$

(b) Mit dem Hauptsatz und der Kettenregel folgt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\int_0^{\cos(x)} e^{-t^2}\,dt\right) = \sin(x)\,e^{-(\cos(x))^2}\,.$$

3.) Wir multiplizieren aus

$$x^2\,e^x - (e^x - 1)^2 = x^2\,e^x - e^{2\,x} + 2\,e^x - 1$$

und benutzen die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n n!\,.$$

Damit ergibt sich die für $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergente Reihe:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\,e^x - e^{2\,x} + 2\,e^x - 1 \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\,x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,x^n}{n!} - 1 \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)!} - \frac{2^n - 2}{n!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n\,(n-1) - 2^n + 2}{n!}\,x^n\,. \end{aligned}$$

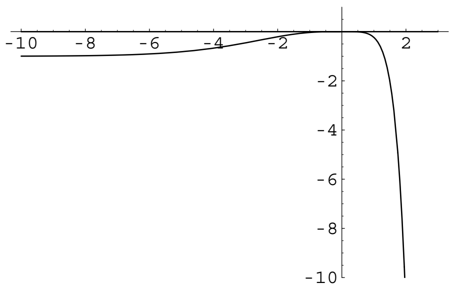
Mit vollständiger Induktion zeigt man:

$$2^n > n\,(n-1) + 2\,, \quad n \geq 4\,.$$

Hierbei kann man sich auf $2^n > n^2$ für $n \geq 5$ stützen.

Die ersten Glieder der Reihenentwicklung lauten:

$$f(x) = -\frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{12} - \frac{2\,x^6}{45} - \frac{x^7}{60} - \frac{11\,x^8}{2240} + \cdots\,.$$



Die Funktion
$f(x) = x^2\,e^x - (e^x - 1)^2$

Man kann auch direkt die n-ten Ableitungen an der Stelle $x_0 = 0$ bilden und dann die Taylorreihe aufstellen. Wir gehen wieder von

$$f(x) = x^2\,e^x - e^{2\,x} + 2\,e^x - 1$$

aus. Durch vollständige Induktion kann man für die Hilfsfunktion

$$h(x) = x^2\,e^x$$

zeigen:

$$h^{(n)}(x) = (x^2 + 2\,n\,x + n\,(n-1))\,e^x\,.$$

Damit gilt für f und $n \geq 1$:

$$f^{(n)}(x) = (x^2 + 2\,n\,x + n\,(n-1))\,e^x - 2^n\,e^x + 2\,e^x\,.$$

Hieraus erhält man:

$$f^{(n)}(0) = n\,(n-1) - 2^n - 2\,, \quad n \geq 1\,.$$

Offenbar ist $f(0) = 0$ und somit wieder:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n\,(n-1) - 2^n + 2}{n!}\,x^n\,.$$

4.) Mit

$$\phi(t) = \ln(x) \quad \Longleftrightarrow \quad t = e^x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

substituieren wir zuerst:

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \left(\int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt\right)\bigg|_{t=\phi^{-1}(x)=e^x} \\ &= \left(\int \cos(e^{\ln(t)})\,e^{2\,\ln(t)}\,dt\right)\bigg|_{t=e^x} \\ &= \left(\int \cos(t)\,t^2\,\frac{1}{t}\,dt\right)\bigg|_{t=e^x} \\ &= \left(\int \cos(t)\,t\,dt\right)\bigg|_{t=e^x}\,. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration berechnen wir:

$$\int \cos(t)\,t\,dt = \sin(t)\,t - \int \sin(t)\,dt = \sin(t)\,t + \cos(t)\,.$$

Insgesamt bekommen wir:

$$\int \cos(e^x)\,e^{2\,x}\,dx = \sin(e^x)\,e^x + \cos(e^x) + C\,.$$

5.)
Man kann beide Aufgaben mit dem Gaußschen Algorithmus zusammen erledigen.

Wir formen die Matrix $A|\vec{b}^T$ wieder mit Zeilenoperationen um:

A					$\vec{b}^T$	
2	0	1	0	0	5	
1	1	0	3	4	2	
1	-1	1	-3	-4	3	
1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}\,\vec{z}_1$
1	1	0	3	4	2	
1	-1	1	-3	4	3	
1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	
0	1	$-\frac{1}{2}$	3	4	$-\frac{1}{2}$	$\vec{z}_2 - \vec{z}_1$
0	-1	$\frac{1}{2}$	-3	-4	$\frac{1}{2}$	$\vec{z}_3 - \vec{z}_1$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	
0	1	$-\frac{1}{2}$	3	4	$-\frac{1}{2}$	
0	0	0	0	0	0	$\vec{z}_3 - \vec{z}_2$

Hieraus entnimmt man: $\mathrm{Rg}(A) = 2$ und $\mathrm{Rg}(A|\vec{b}^T) = 2$. Das System ist lösbar. Die Dimension des Lösungsraums des homogenen Systems ist $n - \mathrm{Rg}(A) = 5 - 2 = 3$.

Wir setzen mit beliebigen Parametern

$$x_5 = \lambda_5\,, \quad x_4 = \lambda_4\,, \quad x_3 = \lambda_3\,,$$

und bekommen die Lösung des inhomogenen Systems:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,\lambda_3\,,\\
x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\lambda_3 - 3\,\lambda_4 - 4\,\lambda_5\,,\\
x_3 &= \lambda_3\,,\\
x_4 &= \lambda_4\,,\\
x_5 &= \lambda_5\,.
\end{aligned}$$

6.)

(a) Offenbar liegt die Zylinderkoordinatenabbildung vor mit der Jacobi-Matrix:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial(r,\phi,z)}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\,\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & r\,\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Durch Entwickeln nach der dritten Spalte ergibt sich die Determinante:

$$\left|\left(\frac{\partial g}{\partial(r,\phi,z)}\right)\right| = r\,((\cos(\phi))^2 + (\sin(\phi))^2) = r\,.$$

(b) Wir verwenden Zylinderkoordinaten:

$$x_1 = r\ \cos(\phi)\,, x_2 = r\ \sin(\phi)\,, x_3 = z\,.$$

Offensichtlich wird der folgende (r, ϕ, x_3)-Bereich:

$$\left\{(r,\phi,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le r \le a\,, 0 \le \phi \le 2\,\pi\,, 0 \le x_3 \le a - r\right\}$$

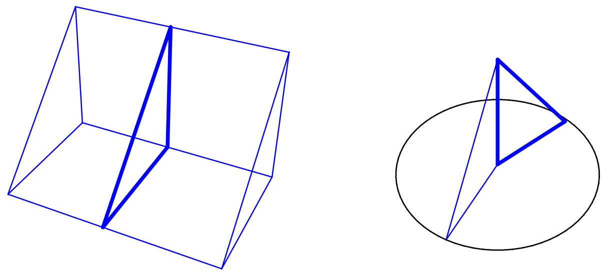
durch die Zylinderkoordinatenabbildung auf K abgebildet.

Nun wenden wir die Substitutionsregel mit

$$\left|\det\left(\frac{d(x_1,x_2,x_3)}{d(r,\phi,x_3)}\right)\right| = r$$

an und bekommen:

$$\begin{aligned}
\int\limits_K (x_1^2 + x_2^2)\, d(x_1,x_2,x_3) &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a}\int\limits_0^{a-r} r^2\, r\, dz\, dr\, d\phi \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a} r^3\,(a-r)\, dr\, d\phi \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left(a\,\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a} d\phi \\
&= a^5\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) 2\,\pi \\
&= \frac{a^5\,\pi}{10}\,.
\end{aligned}$$



Der Kegel K im Zylinderkoordinatenbereich r, ϕ, x_3 (links) und im cartesischen Bereich x_1, x_2, x_3 (rechts)