KLAUSUR

Mathematik I/II für Elektrotechniker

23.2.2004

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 30 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die komplexe Zahl $a = -\sqrt{3} + i$.
   (a) Man gebe die Zahl a in Polardarstellung an.
   (b) Wie lauten die Lösungen der Gleichung $z^5 = a^3$?
   (c) Man gebe eine Formel für den Real- und Imaginärteil der Zahl $\sum\limits_{k=1}^{n} a^k$ an. Hinweis: Eulersche Formel benutzen.
   (d) Man betrachte die Folge der Cosinus- bzw. Sinuswerte $k \geq 1$:
   $c_k = \cos\left(\frac{5}{6}\,k\,\pi\right)$ bzw. $s_k = \sin\left(\frac{5}{6}\,k\,\pi\right)$ und bestimme die kleinste Zahl $g \in \mathbb{N}$ mit $c_{k+g} = c_k$, $s_{k+g} = s_k$.
   (12 P)

2. Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   lautet $\chi_a(\lambda) = (2-\lambda)\,(-2-\lambda)^3$. Man berechne die Eigenvektoren der Matrix A und gebe eine Matrix B an mit: $B^{-1}\,A\,B = D = 4{\times}4$ Diagonalmatrix.
   (8 P)

3. (a) Man zeige durch vollständige Induktion: $\sum\limits_{k=1}^{n}(2\,k-1) = n^2$.
   (b) Man berechne den Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\cdots+(2\,n-1)}{2+4+6+\cdots+2\,n}$.
   Hinweis: $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.
   (12 P)

4. Man berechne eine Stammfunktion von $f(x) = x\,\sqrt{x+1}$, $x > -1$. mit der Substitution $\sqrt{x+1} = t$.
   (8 P)

5. Man betrachte die Funktionen

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt \right)^2 , \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)\,x^2}}{1+t^2}\, dt ,$$

und zeige für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4} .$$

Hinweis: Berechne $f(0) + g(0)$ und zeige: $f'(x) + g'(x) = 0$.
(10 P)

6. Der Bereich D im $\mathbb{R}^3$ werde begrenzt durch die Flächen $x_2 = 0$, $x_2^2 = 2\,x_1 - x_1^2$, $x_3 = 0$ und $x_3 = 1$. Man berechne das Integral:

$$\int_D x_3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, d(x_1, x_2, x_3) .$$

Hinweis: Benutze Zylinderkoordinaten (mit
$r =$ Betrag der Funktionaldeterminante) und das Integral:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\phi))^3\, d\phi = \frac{2}{3}$.
(10 P)

Lösungen

1 a) Es gilt:

$$|a| = \sqrt{3+1} = 2$$

und

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}\,.$$

Also ist

$$\arg(a) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\,\pi$$

und

$$a = 2\,e^{\frac{5}{6}\,\pi\,i}\,.$$

1 b) Es gilt:

$$a^3 = 2^3\,e^{\frac{15}{6}\,\pi\,i} = 8\,e^{\frac{1}{2}\,\pi\,i}\,e^{2\,\pi\,i} = 8\,i\,.$$

Die Lösungen lauten:

$$z_k = \sqrt[5]{8}\,e^{\frac{1}{10}\,\pi\,i + 2\,k\,\frac{1}{5}\,\pi\,i}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4\,.$$

1 c) Wir benutzen die Eulersche Formel:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a^k &= \sum_{k=1}^{n} \left(2\,e^{\frac{5}{6}\,\pi\,i}\right)^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k\,e^{\frac{5}{6}\,k\,\pi\,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^k\,\cos\left(\frac{5}{6}\,k\,\pi\right) + \sum_{k=1}^{n} 2^k\,\sin\left(\frac{5}{6}\,k\,\pi\right)\,i\,.\end{aligned}$$

1 d) Offensichtlich sind die Cosinus- bzw. Sinuswerte gleich, wenn

$$\frac{5}{6}\,k = \frac{5}{6}\,l + 2\,g\,, \quad g \in \mathbb{Z}\,,$$

bzw.

$$k - l = 12\,\frac{g}{5}\,.$$

Die kleinste positive ganze Zahl mit dieser Eigenschaft ist $g = 5$: $k - l = 12$. Die Folge der Cosinus- bzw. Sinuswerte besitzt die Periode 12.
Cosinuswerte ($k = 1, \ldots, 12$):

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1$$

Sinuswerte ($k = 1, \ldots, 12$):

$$\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\,.$$

2) Die Eigenwerte sind offenbar: $\lambda_1 = 2$ (einfach) und $\lambda_2 = -2$ (dreifach). Die Matrix A ist symmetrisch, also hat der Eigenraum von $\lambda_1 = 2$ die Dimension 1 und der von $\lambda_2 = -2$ die Dimension 3. Wir geben Basen der Eigenräume an.

$$(A - 2\,E) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$ ist ein Eigenvektor.

$$(A + 2\,E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort $\vec{v_1} = (-1, 0, 0, 1)$, $\vec{v_2} = (0, -1, 0, 1)$, $\vec{v_3} = (0, 0, -1, 1)$, sind linear unabhängige Eigenvektoren. Die Matrix

$$B = (\vec{u}^{\,T}, \vec{v_1}^{\,T}, \vec{v_2}^{\,T}, \vec{v_3}^{\,T}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt dann

$$B^{-1}\,A\,B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3 a) Anfang: Für $n = 1$ haben wir die richtige Aussage:

$$\sum_{k=1}^{1} (2\,k - 1) = 1 = 1^2\,.$$

Annahme: Die Aussage gilt für ein beliebiges n

$$\sum_{k=1}^{n}(2\,k-1) = n^2\,.$$

Schluss von n auf $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2\,k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2\,k-1)+2\,(n+1)-1 = n^2+2\,(n+1)-1 = n^2+2\,n+1 = (n+1)^2\,.$$

3 b) Aus $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$ folgt im Nenner:

$$2+4+6+\cdots+2\,n = 2\sum_{k=1}^{n} k = n\,(n+1)$$

und weiter

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2\,n-1)}{2+4+6+\cdots+2\,n} = \frac{n^2}{n\,(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\,.$$

Hieraus folgt sofort:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2\,n-1)}{2+4+6+\cdots+2\,n} = 1\,.$$

4) Die Substitution $\sqrt{x+1} = t > 0$ bedeutet $x = t^2-1 > -1$. Wir wenden die Substitutionsregel an

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}$$

mit $\phi(t) = t^2-1$ und $\phi^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$:

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x+1}\,dx &= \int (t^2-1)\,t\,2\,t\,dt\Big|_{t=\sqrt{x+1}}\\
&= 2\int (t^4-t^2)\,dt\Big|_{t=\sqrt{x+1}}\\
&= 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)_{t=\sqrt{x+1}}+C\\
&= \frac{2}{5}\sqrt{x+1}\,(x+1)^2-\frac{2}{3}\sqrt{x+1}\,(x+1)+C\\
&= \sqrt{x+1}\,\left(\frac{2}{5}\,x^2+\frac{2}{15}\,x-\frac{4}{15}\right)+C\,.
\end{aligned}$$

5) Es gilt:

$$f(0) = 0\,, \quad g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,,$$

also

$$f(0) + g(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Ableiten ergibt:

$$f'(x) = 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt\,e^{-x^2}$$

und

$$g'(x) = -2\int_0^1 e^{-(1+t^2)\,x^2}\,x\,dt = -2\int_0^1 e^{-t^2\,x^2}\,x\,dt\;e^{-x^2}\,.$$

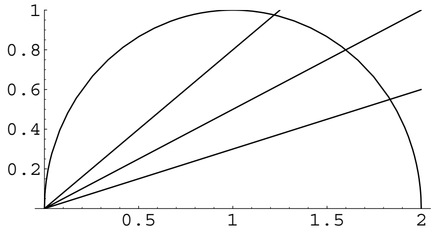
Durch Substitution ergibt sich $\tau = t\,x$:

$$\int_0^1 e^{-t^2\,x^2}\,x\,dt = \int_0^x e^{-\tau^2}\,d\tau$$

und $f'(x) = -g'(x)$ bzw. $f'(x) + g'(x) = 0$. Damit folgt: $f(x) + g(x) = f(0) + g(0) = \frac{\pi}{4}$.

6) Projiziert man den Bereich D in die $x_1 - x_2$-Ebene, so entsteht der Halbkreis: $x_2^2 = 2\,x_1 - x_1^2$ bzw. $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1$, $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_2 \le 1$. Auf dem Halbkreis gilt $x_1^2 + x_2^2 = 2\,x_1 = R^2 = 1$ bzw. $2\,R\,\cos(\phi) = R^2 = 1$. Damit ergibt sich in Zylinderkoordinaten $0 \le r \le 2\,\cos(\phi)$ und:

$$\begin{aligned}
\int_D x_3\,\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,d(x_1,x_2,x_3) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{2\,\cos(\phi)} x_3\,r^2\,dr\,dx_3\,d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 x_3\,\frac{8}{3}\,(\cos(\phi))^3\,dx_3\,d\phi \\
&= \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{9}\,.
\end{aligned}$$



Der Halbkreis $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1$ mit vom Ursprung ausgehenden Strahlen. ($\phi = const.$).