KLAUSUR

Mathematik I/II für Elektrotechniker

13.9.1999

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

1. Man bestimme die Minimalstelle x_M der Funktion:
$$f(x) = x\,e^x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$
und die Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Man skizziere f.
Für welche $y \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $f(x) = y$ Lösungen? Wieviele Lösungen gibt es?
Man begründe, dass im Intervall $x < x_m$ bzw. $x > x_m$ jeweils eine Umkehrfunktion f^{-1} existiert und zeige, dass gilt:
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(1 + f^{-1}(x))\; e^{f^{-1}(x)}}\,.$$
(4P)

2. Sei $0 < a < b$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion. Man bestimme den Grenzwert
$$\lim_{c\to 0^+} \int\limits_{ac}^{bc} \frac{h(x)}{x}\,dx\,.$$
Hinweis: Sind f und g stetig und $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$, dann gibt es nach dem erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi \in (\alpha, \beta)$ mit: $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int\limits_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx\,.$
(4P)

3. Man bestimme die Grenzwerte:
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)\,, \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)\,, \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$$
und skizziere die Funktion $\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}$. Man berechne das Integral ($b > 0$):
$$\int\limits_0^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) dx\,.$$
(Hinweis: Bei dem unbestimmten Integral $\int \frac{1}{e^x - 1}\,dx$ benutze man die Substitution $x = \ln(t)$).
(6P)

4. Seien a_0, a_1, a_2 beliebige reelle Zahlen. Unter welcher Bedingung ist die folgende Matrix invertierbar:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} .$$

   Man berechne die Inverse, indem man A durch Zeilenoperationen (Gaußscher Algorithmus) in die Einheitsmatrix überführt.
   Wie bekommt man die Inverse mit der Cramerschen Regel?
   (4P)

5. Seien a, b_1, b_2 beliebige reelle Zahlen. Welche Lösungen besitzen folgende Gleichungssysteme:
   (a)

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & a\,x_2 & = & b_1\,, \\ -5\,x_1 & - & 3\,x_2 & = & b_2\,. \end{array}$$

   (b)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & = & b_1\,, \\ 4\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 6\,x_3 & = & b_2\,. \end{array}$$

   Man interpretiere die Ergebnisse geometrisch.
   (4P)

6. Gegeben sei die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \frac{1 + x_2}{1 - 3\,x_1}\,, \quad x_1 \neq \frac{1}{3}\,.$$

   Man berechne sämtliche höheren partiellen Ableitungen von f. Man entwickle f auf zwei Wegen in eine Taylorreihe um $(0, 0)$. Erstens, indem man die partiellen Ableitungen in $(0, 0)$ auswertet und zweitens, indem man die geometrische Reihe benutzt.
   Man integriere die Funktion f über den Bereich ($b > 0$):

$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{3}\,(1 - e^{x_2}) \leq x_1 \leq 0\,, 0 \leq x_2 \leq b \right\} .$$

   Man skizziere den Bereich.
   (6P)

Lösungen

1.) Wir bestimmen Minimalstellen:

$$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1+x)\,e^x\,.$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1$$

$$f''(x) = e^x + (1+x)\,e^x = (2+x)\,e^x\,.$$

$$f''(-1) = e^{-1} > 0\,.$$

Es gibt also genau eine Minimalstelle $x_m = -1$ mit $f(x_M) = -\frac{1}{e}$. Eigenschaften der Exponentialfunktion ergeben:

$$\lim_{x\to\infty} x\,e^x = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$$

Für $x < -1$ gilt $f'(x) < 0$ (f ist streng monoton fallend); für $x > -1$ gilt $f'(x) > 0$ (f ist streng monoton wachsend). Wegen der Monotonie ist die Umkehrung möglich von:

$$f : (-\infty, -1) \quad \to \quad \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$$

$$f : (-1, \infty) \quad \to \quad \left(-\frac{1}{e}, \infty\right)$$

Die Gleichung $f(x) = y$ ist nicht lösbar für $y < -\frac{1}{e}$.

$$f(x) = y \begin{cases} \text{besitzt keine Lösung} & , \quad \text{für}\, y < -\frac{1}{e}\,, \\ \text{besitzt die Lösung } -1 & , \quad \text{für}\, y = -\frac{1}{e}\,, \\ \text{besitzt zwei Lösungen} & , \quad \text{für } -\frac{1}{e} < y < 0\,, \\ \text{besitzt eine Lösung} & , \quad \text{für}\, 0 < y\,. \end{cases}$$

Es gilt:

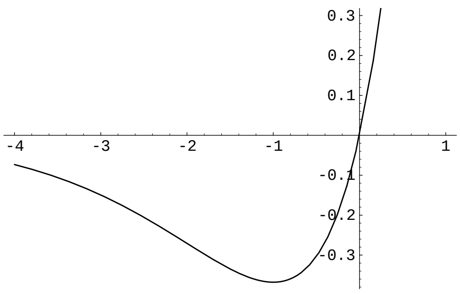
$$f^{-1}(f(x)) = x$$

und somit:

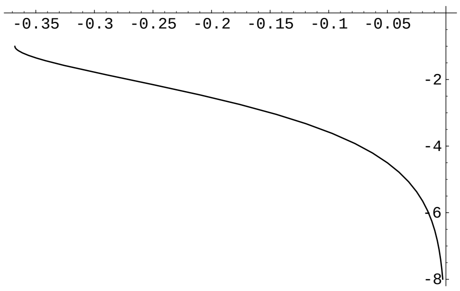
$$(f^{-1})'(f(x))\,f'(x) = (f^{-1})'(f(x))\,(1+x)\,e^x = 1\,.$$

Ersetzt man x durch $f^{-1}(x) \neq -1$, so folgt:

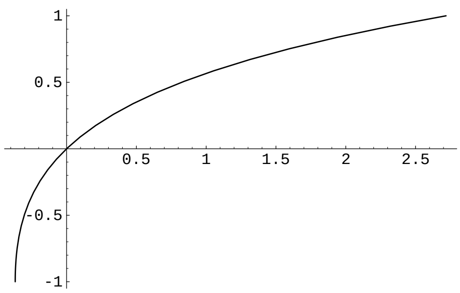
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(1 + f^{-1}(x))\ e^{f^{-1}(x)}}\,.$$



Die Funktion
$f(x) = x\,e^x$



Die
Umkehrfunktion
der Funktion
$f(x) = x\,e^x\,, -\infty < x < -\dfrac{1}{e}$



Die
Umkehrfunktion
der Funktion
$f(x) = x\,e^x\,, -\dfrac{1}{e} < x < \infty$

2.) Da die Funktion $g(x) = \dfrac{1}{x}$ in $[ac, bc]$ größer als Null ist, gilt mit $\xi \in (ac, bc)$:

$$\int\limits_{ac}^{bc} \frac{h(x)}{x}\,dx = h(\xi)\int\limits_{ac}^{bc} \frac{1}{x}\,dx = h(\xi)\ \ln\left(\frac{b}{a}\right)\ .$$

Für $c \to 0^+$ strebt ξ ebenfalls gegen 0 und aus Stetigkeitsgründen folgt:

$$\lim_{c\to 0^+} \int\limits_{ac}^{bc} \frac{h(x)}{x}\, dx = h(0)\ \ln\left(\frac{b}{a}\right) .$$

3.) Mit der Regel von l'Hospital gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x\,(e^x - 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x\,e^x + e^x - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x + 2} \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Genauso bekommt man:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = 0\,.$$

Aber:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - 1}{x\,e^x + e^x - 1} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Die beiden letzten Grenzwerte kann man auch direkt bekommen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x - 1} \\
&= 0 - 0 = 0\,, \\
\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} \\
&= 0 - (-1) = 1\,.
\end{aligned}$$

Damit die Funktion grob skizziert werden kann, machen wir uns klar, dass sie streng monoton fallend ist. Für $x < 0$ bzw. für $x > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} \\
&= \frac{x^2\,e^x - \left(e^x - 1\right)^2}{x^2\,\left(e^x - 1\right)^2}\,.
\end{aligned}$$

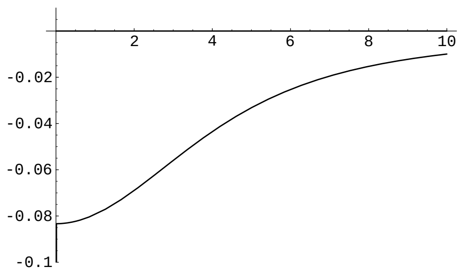
Die rechte Seite ist symmetrisch in x und wir können uns auf $x > 0$ beschränken. Durch Reihenentwicklung zeigen wir, dass die Funktion im Zähler stets echt negativ ist:

$$\begin{aligned} x^2\, e^x - (e^x - 1)^2 &= x^2\, e^x - e^{2\,x} + 2\, e^x - 1 \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n\, x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\, x^n}{n!} - 1 \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)!} - \frac{2^n - 2}{n!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n\,(n-1) - 2^n + 2}{n!}\, x^n \,. \end{aligned}$$

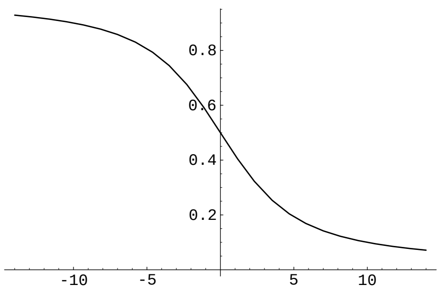
Mit vollständiger Induktion zeigt man:

$$2^n > n\,(n-1) + 2\,, \quad n \geq 4\,.$$

Hierbei kann man sich auf $2^n > n^2$ für $n \geq 5$ stützen. Damit besitzt die in $\mathbb{R}$ absolut konvergente Taylorentwicklung der Zählerfunktion um $x_0 = 0$ lauter negative Entwicklungskoef£zienten. Die Ableitungsfunktion ist dann aus Symmetriegründen für alle $x \neq 0$ negativ.



Die Ableitung der Funktion $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\,, x > 0$



Die Funktion $x \to \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$

Die Substitution $x = \ln(t)$ ($x > 0, t > 1$) ergibt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^x - 1}\, dx &= \left(\int \frac{1}{t-1}\,\frac{1}{t}\, dt\right)_{t=e^x} \\
&= \left(\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)\, dt\right)_{t=e^x} \\
&= (\ln(t-1) - \ln(t) + c)_{t=e^x} \\
&= \ln(e^x - 1) - x + c\,.
\end{aligned}$$

Also für $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)\, dx &= \ln(x) - \ln(e^x - 1) + x + c \\
&= \ln\left(\frac{x}{e^x - 1}\right) + x + c\,.
\end{aligned}$$

Erneut gilt mit der Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$$

und damit

$$\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{x}{e^x - 1}\right) = 0\,.$$

Schließlich:

$$\int_0^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)\, dx = \ln\left(\frac{b}{e^b - 1}\right) + b\,.$$

Man kann natürlich auch mit $\epsilon > 0$ bestimmt integrieren:

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)\, dx &= \ln(b) - \ln(\epsilon) - \int_{e^\epsilon}^{e^b} \frac{1}{(t-1)\,t}\, dt \\
&= \ln(b) - \ln(\epsilon) - (\ln(t-1) - \ln(t))|_{e^\epsilon}^{e^b} \\
&= \ln\left(\frac{b}{e^b - 1}\right) + b - \ln\left(\frac{\epsilon}{e^\epsilon - 1}\right) + \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ liefert dann dasselbe Resultat wie oben.

4.) Da A eine untere Diagonalmatrix A ist, gilt:

$$\det(A) = a_0^3\,.$$

Für $a_0 \neq 0$ ist A also invertierbar. Wir überführen die Matrix durch Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix und gehen nach folgendem Schema vor:

A	E	
$a_0 \quad 0 \quad 0$	$1 \quad 0 \quad 0$	
$a_1 \quad a_0 \quad 0$	$0 \quad 1 \quad 0$	
$a_2 \quad a_1 \quad a_0$	$0 \quad 0 \quad 1$	
$1 \quad 0 \quad 0$	$\frac{1}{a_0} \quad 0 \quad 0$	
$a_1 \quad a_0 \quad 0$	$0 \quad 1 \quad 0$	$\frac{1}{a_0}\,\vec{z}_1$
$a_2 \quad a_1 \quad a_0$	$0 \quad 0 \quad 1$	
$1 \quad 0 \quad 0$	$\frac{1}{a_0} \quad 0 \quad 0$	
$0 \quad a_0 \quad 0$	$-\frac{a_1}{a_0} \quad 1 \quad 0$	$\vec{z}_2 - a_1\,\vec{z}_1$
$0 \quad a_1 \quad a_0$	$-\frac{a_2}{a_0} \quad 0 \quad 1$	$\vec{z}_3 - a_2\,\vec{z}_1$
$1 \quad 0 \quad 0$	$\frac{1}{a_0} \quad 0 \quad 0$	
$0 \quad 1 \quad 0$	$-\frac{a_1}{a_0^2} \quad \frac{1}{a_0} \quad 0$	
$0 \quad a_1 \quad a_0$	$-\frac{a_2}{a_0} \quad 0 \quad 1$	$\frac{1}{a_0}\,\vec{z}_2$
$1 \quad 0 \quad 0$	$\frac{1}{a_0} \quad 0 \quad 0$	
$0 \quad 1 \quad 0$	$-\frac{a_1}{a_0^2} \quad \frac{1}{a_0} \quad 0$	
$0 \quad 0 \quad a_0$	$-\frac{a_2}{a_0} + \frac{a_1^2}{a_0^2} \quad -\frac{a_1}{a_0} \quad 1$	$\vec{z}_3 - a_1\,\vec{z}_2$
$1 \quad 0 \quad 0$	$\frac{1}{a_0} \quad 0 \quad 0$	
$0 \quad 1 \quad 0$	$-\frac{a_1}{a_0^2} \quad \frac{1}{a_0} \quad 0$	
$0 \quad 0 \quad 1$	$-\frac{a_2}{a_0^2} + \frac{a_1^2}{a_0^3} \quad -\frac{a_1}{a_0^2} \quad \frac{1}{a_0}$	$\frac{1}{a_0}\,\vec{z}_3$

Die Inverse lautet.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_0} & 0 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_0^2} & \frac{1}{a_0} & 0 \\ -\frac{a_2}{a_0^2} + \frac{a_1^2}{a_0^3} & -\frac{a_1}{a_0^2} & \frac{1}{a_0} \end{pmatrix}$$

Wir können auch die Cramersche Regel benutzen:

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0^3} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

5.a) Wir lösen das System mit dem Gaußschen Algorithmus:

$$\begin{array}{llcll} \text{(I)} & x_1 & - & a\,x_2 & = & b_1\,, \\[2ex] \text{(II)} & -5\,x_1 & - & 3\,x_2 & = & b_2\,. \end{array}$$

Erster Schritt:

$$\begin{array}{llclcll} \text{(I,1)} & x_1 & - & a\,x_2 & = & b_1\,, & \\[2ex] \text{(II,1)} & 0 & - & (5\,a+3)\,x_2 & = & 5\,b_1 + b_2\,. & \text{(II)} + 5\,\text{(I)} \end{array}$$

Zweiter Schritt:

$$\text{(A)}: \quad a \neq -\frac{3}{5}\,, \quad \text{(B)}: \quad a = -\frac{3}{5}\,.$$

(A):

$$\begin{array}{llclcll} \text{(I,2)} & x_1 & - & a\,x_2 & = & b_1\,, & \\[2ex] \text{(II,2)} & 0 & + & x_2 & = & -\frac{5\,b_1+b_2}{5\,a+3}\,. & -\frac{1}{5\,a+3}\,\text{(II,2)} \end{array}$$

Das System ist eindeutig lösbar:

$$x_2 = -\frac{5\,b_1 + b_2}{5\,a+3}\,, \quad x_1 = -\frac{3\,b_1 + a\,b_2}{5\,a+3}\,.$$

Es liegen zwei sich schneidende Geraden in der Ebene vor.
(B): Das System lautet:

$$\begin{array}{llclcl} \text{(I,2)} & x_1 & + & \frac{3}{5}\,x_2 & = & b_1\,, \\[2ex] \text{(II,2)} & 0 & + & 0 & = & 5\,b_1 + b_2\,. \end{array}$$

(B1): $5\,b_1 + b_2 = 0$. Das System besteht nur aus einer Gleichung:

$$x_1 - a\,x_2 = b_1$$

und besitzt folgende Lösungen:

$$x_2 = \lambda\,, \quad x_1 = a\,\lambda + b_1\,,$$

mit beliebigem λ.
Es liegen zwei zusammenfallende (identische) Geraden in der Ebene vor.
(B2): $5\,b_1 + b_2 \neq 0$. Das System besitzt keine Lösung.
Es liegen zwei parallele, nicht zusammenfallende Geraden in der Ebene vor.
5.b)

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{(I)} & 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & = & b_1\,, \\ \text{(II)} & 4\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 6\,x_3 & = & b_2\,. \end{array}$$

Wir gehen nach dem Gaußschen Algorithmus vor.

$$\begin{array}{rrcrcrcll} \text{(I,1)} & x_1 & + & x_2 & - & \frac{3}{2}\,x_3 & = & \frac{b_1}{2}\,, & \frac{1}{2}\,\text{(I)} \\[1em] \text{(II,1)} & 4\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 6\,x_3 & = & b_2\,. & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrcll} \text{(I,2)} & x_1 & + & x_2 & - & \frac{3}{2}\,x_3 & = & \frac{b_1}{2}\,, & \\[1em] \text{(II,2)} & 0 & + & 0 & + & 0 & = & -2\,b_1 + b_2\,, & \text{(II,1)} - 4\,\text{(I,1)} \end{array}$$

Falls $b_1 = \dfrac{b_2}{2}$ besteht das System nur aus einer einzigen Gleichung. Wir bekommen dann folgende Lösungen mit beliebigem $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$x_3 = \lambda_3\,, \quad x_2 = \lambda_2\,, \quad x_1 = \frac{b_1}{2} - \lambda_2 + \frac{3}{2}\,\lambda_3\,.$$

Es liegen zwei parallele, zusammenfallende Ebenen im Raum vor.

Falls $b_1 \neq \dfrac{b_2}{2}$ endet der Gaußsche Algorithmus mit einem Widerspruch. Das System besitzt keine Lösung.
Es liegen zwei parallele, nicht zusammenfallende Ebenen im Raum vor.
6.)

$$f(x_1, x_2) = \frac{1 + x_2}{1 - 3\,x_1}$$

Wir berechnen folgende partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f_{x_1}(x_1,x_2) &= 3\,\frac{1+x_2}{(1-3\,x_1)^2}\,,\\
f_{x_2}(x_1,x_2) &= \frac{1}{1-3\,x_1}\,,\\
f_{x_1x_1}(x_1,x_2) &= 2\cdot 3^2\,\frac{1+x_2}{(1-3\,x_1)^3}\,,\\
f_{x_1x_2}(x_1,x_2) &= 3\,\frac{1}{(1-3\,x_1)^2}\,,\\
f_{x_1x_1x_1}(x_1,x_2) &= 6\cdot 3^3\,\frac{1+x_2}{(1-3\,x_1)^4}\,,\\
f_{x_1x_1x_2}(x_1,x_2) &= 2\cdot 3^2\,\frac{1}{(1-3\,x_1)^3}\,,\\
&\vdots\\
f_{\underbrace{x_1\ldots x_1}_{\nu}x_1}(x_1,x_2) &= (\nu+1)!\cdot 3^{\nu+1}\,\frac{1+x_2}{(1-3\,x_1)^{\nu+2}}\,,\\
f_{\underbrace{x_1\ldots x_1}_{\nu}x_2}(x_1,x_2) &= \nu!\cdot 3^{\nu}\,\frac{1}{(1-3\,x_1)^{\nu+1}}
\end{aligned}$$

Alle anderen partiellen Ableitungen verschwinden. Die partiellen Ableitungen lassen sich nun leicht im Nullpunkt auswerten, und wir bekommen die (formale) Taylorreihe:

$$T(f,x_1,x_2,0,0) = 1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} 3^{\nu+1}\,x_1^{\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} 3^{\nu}\,x_1^{\nu}\,x_2\,.$$

Mit der geometrischen Reihe ergibt sich:

$$\frac{1}{1-3\,x_1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} 3^{\nu}\,x_1^{\nu}\,,\quad |x_1| < \frac{1}{3}$$

und damit erhält man für: $|x_1| < \frac{1}{3}$, $x_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(x_1,x_2) = (1+x_2)\,\sum_{\nu=0}^{\infty} 3^{\nu}\,x_1^{\nu}\,.$$

Für $x_1 = \frac{1}{3}$ ist der Integrand nicht erklärt. Die Funktion

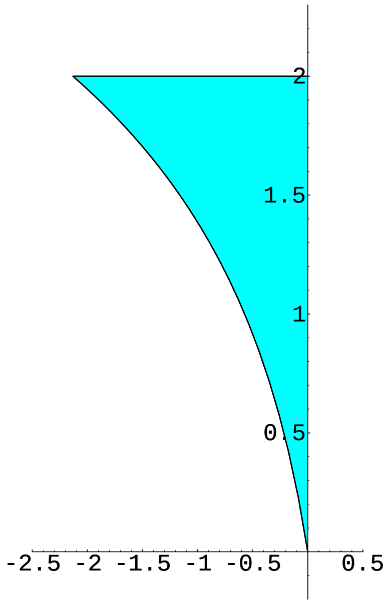
$$h(x_2) = \frac{1}{3}\,(1 - e^{x_2})$$

ist monoton fallend. Es gilt

$$\lim_{x_2 \to \infty} h(x_2) = -\infty \quad \text{und} \quad h(0) = 0\,.$$

Im Integrationsbereich gilt dann stets $x_1 < 0 < \frac{1}{3}$. Man kann den Integrationsbereich auch so beschreiben:

$$\frac{1}{3}\left(1 - e^{b}\right) \le x_1 \le 0\,, \quad \ln(1 - 3\,x_1) \le x_2 \le b\,.$$



Der Integrationsbereich
$\frac{1}{3}\,(1 - e^{x_2}) \le x_1 \le 0\,,\ 0 \le x_2 \le b$

Wir berechnen durch iterierte Integration:

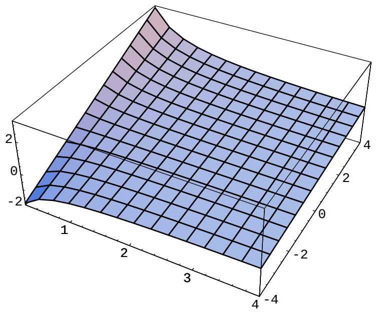
$$\begin{aligned}
&\int_0^b \int_{\frac{1}{3}(1-e^{x_2})}^{0} \frac{1+x_2}{1-3\,x_1}\,dx_1\,dx_2 \\
&= \; -\frac{1}{3}\int_0^b (1+x_2)\;\ln(1-3\,x_1)\big|_{x_1=\frac{1}{3}(1-e^{x_2})}^{x_1=0}\,dx_2 \\
&= \; \frac{1}{3}\int_0^b (1+x_2)\,x_2\,dx_2 \\
&= \; \frac{1}{3}\left(\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_2^3}{3}\right)\Bigg|_{x_2=0}^{x_2=b} \\
&= \; \frac{b^2}{6}+\frac{b^3}{9}\,.
\end{aligned}$$

Wir bemerken noch, dass man die Reihenfolge der Integration auch vertauschen könnte. Man kommt mit etwas größerem Aufwand zum gleichen Ergebnis wie oben:

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{3}\left(1-e^b\right)}^{0} \int_{\ln(1-3\,x_1)}^{b} \frac{1+x_2}{1-3\,x_1}\,dx_2\,dx_1 \\
&= \int_{\frac{1}{3}\left(1-e^b\right)}^{0} \left(\frac{b+\frac{b^2}{2}}{1-3\,x_1}-\frac{\ln(1-3\,x_1)+\frac{(\ln(1-3\,x_1))^2}{2}}{1-3\,x_1}\right)dx_1 \\
&= \left(b+\frac{b^2}{2}\right)\int_{\frac{1}{3}\left(1-e^b\right)}^{0} \frac{1}{1-3\,x_1}\,dx_1 - \int_{\frac{1}{3}\left(1-e^b\right)}^{0} \frac{\ln(1-3\,x_1)}{1-3\,x_1}\,dx_1 \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}\left(1-e^b\right)}^{0} \frac{(\ln(1-3\,x_1))^2}{1-3\,x_1}dx_1\,.
\end{aligned}$$

Auswerten der Integrale ergibt schliesslich:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\frac{1}{3}\left(1-e^b\right)}^{0} \int\limits_{\ln(1-3\,x_1)}^{b} \frac{1+x_2}{1-3\,x_1}\, dx_2\, dx_1 \\
&= -\frac{1}{3}\left(b+\frac{b^2}{2}\right) \ln(1-3\,x_1)\Big|_{\frac{1}{3}\left(1-e^b\right)}^{0} + \frac{1}{6}\left(\ln(1-3\,x_1)\right)^2\Big|_{\frac{1}{3}\left(1-e^b\right)}^{0} \\
&\quad + \frac{1}{18}\left(\ln(1-3\,x_1)\right)^3\Big|_{\frac{1}{3}\left(1-e^b\right)}^{0} \\
&= \frac{1}{3}\,b^2 + \frac{1}{6}\,b^3 - \frac{1}{6}\,b^2 - \frac{1}{18}\,b^3 \\
&= \frac{b^2}{6} + \frac{b^3}{9}\,.
\end{aligned}$$



Die Funktion $\dfrac{1+x_2}{1-3\,x_1}$ im Bereich $0.2 \le x_1 \le 4,\ -4 \le x_2 \le 4$