KLAUSUR

Mathematik I/II für Informatiker

23.2.2004

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 20 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die komplexe Zahl $a = -\sqrt{3} + i$.
   (a) Man gebe die Zahl a in Polardarstellung an.
   (b) Wie lauten die Lösungen der Gleichung $z^5 = a^3$?
   (c) Man gebe eine Formel für den Real- und Imaginärteil der Zahl $\sum_{k=1}^{n} a^k$ an. Hinweis: Eulersche Formel benutzen.
   (d) Man betrachte die Folge der Cosinus- bzw. Sinuswerte $k \geq 1$:
   $c_k = \cos\left(\frac{5}{6}\,k\,\pi\right)$ bzw. $s_k = \sin\left(\frac{5}{6}\,k\,\pi\right)$ und bestimme die kleinste Zahl $g \in \mathbb{N}$ mit $c_{k+g} = c_k$, $s_{k+g} = s_k$.
   (12 P)

2. Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   lautet $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\,(-2-\lambda)^3$. Man berechne die Eigenvektoren der Matrix A und gebe eine Matrix B an mit: $B^{-1}\,A\,B = D = 4\times4$ Diagonalmatrix.
   (8 P)

3. (a) Man zeige durch vollständige Induktion: $\sum_{k=1}^{n}(2\,k-1) = n^2$.
   (b) Man berechne den Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2\,n-1)}{2+4+6+\cdots+2\,n}$.
   Hinweis: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$.
   (12 P)

4. Man berechne eine Stammfunktion von $f(x) = x\,\sqrt{x+1}$, $x > -1$. mit der Substitution $\sqrt{x+1} = t$.
   (8 P)

Lösungen

1 a) Es gilt:
$$|a| = \sqrt{3+1} = 2$$
und
$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}\,.$$
Also ist
$$\arg(a) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\,\pi$$
und
$$a = 2\,e^{\frac{5}{6}\,\pi\,i}\,.$$

1 b) Es gilt:
$$a^3 = 2^3\,e^{\frac{15}{6}\,\pi\,i} = 8\,e^{\frac{1}{2}\,\pi\,i}\,e^{2\,\pi\,i} = 8\,i\,.$$
Die Lösungen lauten:
$$z_k = \sqrt[5]{8}\,e^{\frac{1}{10}\,\pi\,i + 2\,k\,\frac{1}{5}\,\pi\,i}\,, \quad k = 0,1,2,3,4\,.$$

1 c) Wir benutzen die Eulersche Formel:
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a^k &= \sum_{k=1}^{n}\left(2\,e^{\frac{5}{6}\,\pi\,i}\right)^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k\,e^{\frac{5}{6}\,k\,\pi\,i}\\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^k\,\cos\left(\frac{5}{6}\,k\,\pi\right) + \sum_{k=1}^{n} 2^k\,\sin\left(\frac{5}{6}\,k\,\pi\right)\,i\,.\end{aligned}$$

1 d) Offensichtlich sind die Cosinus- bzw. Sinuswerte gleich, wenn
$$\frac{5}{6}\,k = \frac{5}{6}\,l + 2\,g\,, \quad g \in \mathbb{Z}\,,$$
bzw.
$$k - l = 12\,\frac{g}{5}\,.$$
Die kleinste positive ganze Zahl mit dieser Eigenschaft ist $g = 5$: $k - l = 12$. Die Folge der Cosinus- bzw. Sinuswerte besitzt die Periode 12.
Cosinuswerte ($k = 1, \ldots, 12$):
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1$$

Sinuswerte ($k = 1, \ldots, 12$):

$$\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\,.$$

2) Die Eigenwerte sind offenbar: $\lambda_1 = 2$ (einfach) und $\lambda_2 = -2$ (dreifach). Die Matrix A ist symmetrisch, also hat der Eigenraum von $\lambda_1 = 2$ die Dimension 1 und der von $\lambda_2 = -2$ die Dimension 3. Wir geben Basen der Eigenräume an.

$$(A - 2\,E) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\,.$$

Man sieht sofort $\vec{u} = (1,1,1,1)$ ist ein Eigenvektor.

$$(A + 2\,E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Man sieht sofort $\vec{v_1} = (-1,0,0,1)$, $\vec{v_2} = (0,-1,0,1)$, $\vec{v_3} = (0,0,-1,1)$, sind linear unabhängige Eigenvektoren. Die Matrix

$$B = (\vec{u}^{\,T}, \vec{v_1}^{\,T}, \vec{v_2}^{\,T}, \vec{v_3}^{\,T}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt dann

$$B^{-1}\,A\,B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\,.$$

3 a) Anfang: Für $n = 1$ haben wir die richtige Aussage:

$$\sum_{k=1}^{1} (2\,k - 1) = 1 = 1^2\,.$$

Annahme: Die Aussage gilt für ein beliebiges n

$$\sum_{k=1}^{n}(2\,k-1) = n^2\,.$$

Schluss von n auf $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2\,k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2\,k-1)+2\,(n+1)-1 = n^2+2\,(n+1)-1 = n^2+2\,n+1 = (n+1)^2\,.$$

3 b) Aus $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$ folgt im Nenner:

$$2+4+6+\cdots+2\,n = 2\,\sum_{k=1}^{n} k = n\,(n+1)$$

und weiter

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2\,n-1)}{2+4+6+\cdots+2\,n} = \frac{n^2}{n\,(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\,.$$

Hieraus folgt sofort:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2\,n-1)}{2+4+6+\cdots+2\,n} = 1\,.$$

4) Die Substitution $\sqrt{x+1} = t > 0$ bedeutet $x = t^2-1 > -1$. Wir wenden die Substitutionsregel an

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}$$

mit $\phi(t) = t^2-1$ und $\phi^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$:

$$\begin{aligned}
\int x\,\sqrt{x+1}\,dx &= \int (t^2-1)\,t\,2\,t\,dt\Big|_{t=\sqrt{x+1}} \\
&= 2\int (t^4-t^2)\,dt\Big|_{t=\sqrt{x+1}} \\
&= 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)_{t=\sqrt{x+1}} + C \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{x+1}\,(x+1)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\,(x+1) + C \\
&= \sqrt{x+1}\,\left(\frac{2}{5}\,x^2+\frac{2}{15}\,x-\frac{4}{15}\right) + C\,.
\end{aligned}$$