KLAUSUR

Mathematik I (E-Techniker/Mechatroniker/Informatiker/W-Ingenieure)

1.9.2006

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Zum Bestehen der Klausur sollten 20 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an!
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aus $\mathbb{R}^3$ besitzen jeweils die Länge 2 und erfüllen die Gleichung:
$$(2\,\vec{a} - 3\,\vec{b}) \cdot (2\,\vec{a} + \vec{b}) = -4\,.$$
Wie groß ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$? Welchen Winkel schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?
(6P)

2. Auf welcher Kurve in der Gauß-Ebene liegen die komplexen Zahlen z, die durch die folgende Gleichung gegeben werden
$$|z + i|^2 = \Re(z + 1)\,?$$
($\Re =$ Realteil). Hinweis: Setzen Sie $z = x + y\,i,\ x, y \in \mathbb{R}$, und geben Sie damit $|z + i|^2$ und $\Re(z + 1)$ an.
(6P)

3. Lösen Sie das folgende System für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ mit dem Gauß-Algorithmus:
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$
(6P)

Bitte wenden!

4. (a) Berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x)\, x^2 \,.$$

Welcher Wert ergibt sich für

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\ln(x)\, x^2} \,?$$

(b) An welcher Stelle besitzt die Funktion

$$f(x) = e^{\ln(x)\, x^2} \,, \quad x > 0 \,,$$

eine waagerechte Tangente? Ist diese Stelle eine Minimalstelle oder eine Maximalstelle?
(8P)

5. (a) Zerlegen Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{16}{x^2 - 4}$$

in Partialbrüche und geben Sie im Intervall $-2 < x < 2$ eine Stammfunktion von f an.
(b) Wie lautet die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$?
(8P)

6. (a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx$$

durch Produktintegration.
(b) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \, dx$$

mit der Substitution $x = \frac{1}{t}$.
(8P)

Lösungen

1) Es gilt:

$$\begin{aligned}(2\,\vec{a}-3\,\vec{b})\cdot(2\,\vec{a}+\vec{b}) &= 4\,\vec{a}\cdot\vec{a}-6\,\vec{b}\cdot\vec{a}+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}-3\,\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= 4\,||\vec{a}||^2-4\,\vec{a}\cdot\vec{b}-3\,||\vec{b}||^2\,,\end{aligned}$$

also

$$4\cdot 4-3\cdot 4-4\,\vec{a}\cdot\vec{b}=-4\,,$$

bzw.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\,.$$

Den Cosinus des eingeschlossenen Winkels erhalten wir aus:

$$2=\vec{a}\cdot\vec{b}=||\vec{a}||\;||\vec{b}||\;\cos(\alpha)=4\;\cos(\alpha)\,.$$

Es ergibt sich

$$\cos(\alpha)=\frac{1}{2}\,,$$

bzw.

$$\alpha=\frac{\pi}{3}\,.$$

2) Wir setzen $z=x+y\,i$, $x,y\in\mathbb{R}$. Die Bedingung

$$|z+i|^2=\Re(z+1)$$

nimmt dann die Gestalt an:

$$x^2+(y+1)^2=x+1\,.$$

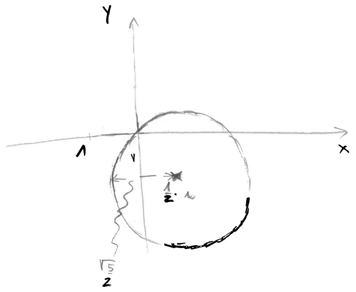
Nur $x\geq -1$ ist sinnvoll. Umformen ergibt:

$$x^2-x+\frac{1}{4}+(y+1)^2=1+\frac{1}{4}$$

bzw.

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}\,.$$

Die Zahlen liegen auf einem Kreis in Gaußschen Ebene mit dem Mittelpunkt $\frac{1}{2}-i$ und dem Radius $\frac{\sqrt{5}}{2}$. (Auf der ganzen Kreislinie gilt $x\geq -1$).



2 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\geq$ 2 $\frac{5}{2}$ $\neq$ 3

3) Wir formen um mit Zeilenoperationen:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{z}_1 \rightsquigarrow \vec{z}_3 \, , \vec{z}_3 \rightsquigarrow \vec{z}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \qquad \vec{z}_2 \rightsquigarrow \vec{z}_2 - \vec{z}_1 \, , \vec{z}_3 \rightsquigarrow \vec{z}_3 - a\,\vec{z}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & \underbrace{2-a-a^2}_{(1-a)\,(2+a)} \end{pmatrix} \qquad \vec{z}_3 \rightsquigarrow \vec{z}_3 - \vec{z}_2$$

Für $a = 1$ haben wir die Lösungen:

$$x_3 = \lambda_3 \, , x_2 = \lambda_2 \, , x_1 = -\lambda_2 - \lambda_3 \, .$$

Für $a = -2$ haben wir die Lösungen:

$$x_3 = \lambda_3 \, , x_2 = \lambda_3 \, , x_1 = \lambda_3 \, .$$

Im Fall $a \neq 1, -2$ haben wir nur die triviale Lösung:

$$x_3 = 0 \, , x_2 = 0 \, , x_1 = 0 \, .$$

4) (a) Mit der Regel von de l' Hospital ergibt sich:

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x)\, x^2 = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-2\,\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0+} \left(-\frac{1}{2}\, x^2\right) = 0\,.$$

Damit bekommen wir aus Stetigkeitsgründen:

$$\lim_{x\to 0+} e^{\ln(x)\, x^2} = e^0 = 1\,.$$

(b) Wir berechnen die Ableitung:

$$f'(x) = e^{\ln(x)\, x^2}\, \left(\frac{1}{x}\, x^2 + \ln(x)\, 2\, x\right) = e^{\ln(x)\, x^2}\, x\, (1 + 2\, \ln(x))\,.$$

Es gilt $f'(x) = 0$ für:

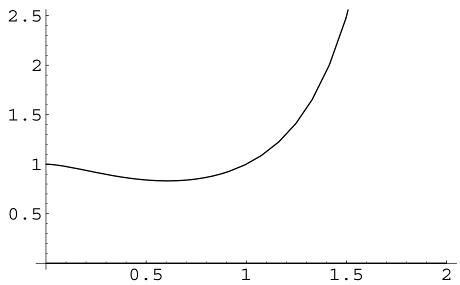
$$1 + 2\, \ln(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = e^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Ferner ist f im Intervall $(0, e^{-\frac{1}{2}}]$ monoton fallend ($f'(x) < 0, x \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$) und im Intervall $[e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$ monoton wachsend ($f'(x) > 0, x \in (e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$). Wir haben ein Minimum.
Alternative:

$$f''(x) = e^{\ln(x)\, x^2}\, x^2\, (1 + 2\, \ln(x))^2 + e^{\ln(x)\, x^2}\, \left(1 + 2\, \ln(x) + 2\right)\,,$$

also

$$f''\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 2\, e^{-\frac{1}{2}\, e^{-1}} > 0\,.$$



5) (a) Wir machen den Ansatz:

$$\frac{16}{x^2 - 4} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2} = \frac{a\,(x + 2) + b\,(x - 2)}{x^2 - 4}$$

und bekommen

$$a + b = 0\,, \quad 2\,a - 2\,b = 16\,,$$

also

$$a = 4\,, \quad b = -4\,,$$

und

$$f(x) = \frac{4}{x-2} - \frac{4}{x+2}\,.$$

Im Intervall $-2 < x < 2$, ($x - 2 < 0, x + 2 > 0$), ergibt sich:

$$\int f(x)\,dx = 4\,\ln(-(x-2)) - 4\,\ln(x+2) + c = 4\,\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + c\,.$$

(b) Die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$ bekommen wir mit der geometrischen Reihe für $|x| < 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{16}{x^2-4} = -4\,\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}} \\ &= -4\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{4^\nu}\,x^{2\,\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-4^{-(\nu-1)})\,x^{2\,\nu}\,. \end{aligned}$$

6) (a) Produktintegration ergibt:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx &= -\frac{1}{x}\,\ln(x) - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\,dx \\ &= -\frac{1}{x}\,\ln(x) + \int\frac{1}{x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{x}\,\ln(x) - \frac{1}{x} + c\,. \end{aligned}$$

(b) Substitution ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{x^2}\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} t^2\,\sin(t)\,\left(-\frac{1}{t^2}\right)\,dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (-\sin(t))\,dt \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$