KLAUSUR

Mathematik I (E-Techniker/Mechatroniker/Informatiker/W-Ingenieure)

1.9.2008

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Zum Bestehen der Klausur sollten 20 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Durch die Punkte $P_1 = (0,0,3)$, $P_2 = (0,2,0)$ und $P_3 = (1,-1,4)$ geht eine Ebene E_1. Durch die Gleichung $2\,x + 4\,y - 6\,z = 9$ wird eine Ebene E_2 gegeben. Bestimmen Sie die Schnittgerade von E_1 und E_2.
   (4P)

2. (a) Welche $z \in \mathbb{C}$ lösen die Gleichung

$$\Im\left(\frac{z-2}{z-i}\right) = 0\,, \quad z \neq i\,?$$

   Skizzieren Sie die Lösungsmenge in der Gaußschen Ebene. ($\Im$ bezeichnet den Imaginärteil).
   (b) Welche $z \in \mathbb{C}$ lösen die Gleichung:

$$z + 1 = (z-1)\,(z-2\,i)\,?$$

   (6P)

3. (a) Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix durch Zeilenumformungen :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie alle 2×2 Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

   die $C\,B = B\,C$ erfüllen.
   (8P)

Bitte wenden!

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$.
   (a) Berechnen Sie die Summe:

$$S(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2\,n}\right) .$$

   und den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} S(n)$. Hinweis:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2\,n+1)\,.$$

   (b) Vergleichen Sie den Grenzwert mit dem Integral: $\int_0^1 f(x)\, dx$.
   (6P)

5. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$(a) \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right) \,, \text{ (rechtsseitiger Grenzwert)}\,,$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \frac{t\,e^{2\,t}}{1+3\,t}\, dt}{e^{2\,x}} \,.$$

   (8P)

6. (a) Geben Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an:

$$e^{2\,x}\,, \qquad e^x - 1\,.$$

   Wo konvergieren die Reihen?

   (b) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion streng monoton wächst:

$$f(x) = \frac{e^{2\,x}}{e^x + 1}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

   (c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral (Substitution und Partialbruchzerlegung):

$$\int \frac{e^{2\,x}}{e^x+1}\, dx\,.$$

   (10P)

Lösungen

1) Wir berechnen zuerst einen Normalenvektor der Ebene E_1:

$$\vec{n} = \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = (0,2,-3) \times (1,-1,1) = (-1,-3,-2)\,.$$

Damit bekommen wir eine parameterfreie Darstellung der Ebene E_1:

$$(-1,-3,-2)\,((x,y,z)-(0,0,3)) = -x-3\,y-2\,z+6 = 0\,.$$

Die Schnittgerade bekommen wir aus dem System:

$$\begin{aligned} x+3\,y+2\,z &= 6\,, \\ 2\,x+4\,y-6\,z &= 9\,, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x+3\,y+2\,z &= 6\,, \\ -2\,y-10\,z &= -3\,. \end{aligned}$$

Setzen wir $z = t \in \mathbb{R}$, so ergibt sich:

$$y = -5\,t + \frac{3}{2}\,, \quad x = 13\,t + \frac{3}{2}$$

und die Schnittgerade:

$$(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) + t\,(13,-5,1)\,.$$

2 a) Mit $z = x + y\,i$, $x, y \in \mathbb{R}$, $(x,y) \neq (0,1)$, berechnen wir:

$$\begin{aligned} \frac{z-2}{z-i} &= \frac{(z-2)\,(\bar{z}+i)}{(z-i)\,(\bar{z}+i)} \\ &= \frac{-2\,x+x^2-y+y^2}{x^2+(y-1)^2} + \frac{-2+x+2\,y}{x^2+(y-1)^2}\,i\,. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge stellt nun folgende Gerade mit Ausnahme des Punktes $(0,1)$ dar:

$$y = -\frac{1}{2}\,x + 1\,.$$

2b) Wir formen um:

$$z + 1 = (z - 1)\,(z - 2\,i) = z^2 - (1 + 2\,i)\,z + 2\,i$$

und bekommen die Gleichung:

$$z^2 - 2\,(1 + i)\,z - 1 + 2\,i = 0\,.$$

Quadratische Ergänzung liefert:

$$(z - (1 + i))^2 = 1\,.$$

Die Lösungen lauten:

$$z_1 = i\,, \quad z_2 = 2 + i\,.$$

3 a) Wir gehen aus von der Matrix A und formen gleichzeitig die Einheitsmatrix um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

$\vec{z}_1 \rightsquigarrow \vec{z}_1 + \vec{z}_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

$\vec{z}_1 \rightsquigarrow \frac{1}{2}\,\vec{z}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

$\vec{z}_2 \rightsquigarrow \vec{z}_2 - \vec{z}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\,.$$

$\vec{z}_2 \rightsquigarrow -\vec{z}_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\,.$$

Also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\,.$$

3b) Wir bilden die Produkte:

$$C\,B = \begin{pmatrix} a + i\,b & a \\ c + i\,d & c \end{pmatrix}\,, \quad B\,C = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ i\,a & i\,b \end{pmatrix}\,.$$

Die Bedingung $C\,B = B\,C$ führt auf das System:

$$a + i\,b = a + c\,, \quad a = b + d\,, \quad c + i\,d = i\,a\,, \quad c = i\,b\,.$$

Aus der ersten und der vierten Gleichung ergibt sich $c = i\,b$. Die zweite und die dritte Gleichung ergibt:

$$a = b + d\,.$$

Mit beliebigen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ bekommen wir folgende Lösung:

$$a = \lambda + \mu\,, \quad b = \lambda\,, \quad c = i\,\lambda\,, \quad d = \mu\,,$$

bzw.

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & \lambda \\ i\,\lambda & \mu \end{pmatrix}\,.$$

4a) Die Summe ergibt:

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2\,n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n^2}\,k^2 - \frac{1}{n^2}\,k + \frac{1}{4\,n^2} \right) \\ &= \frac{1}{n^3}\,\frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1) - \frac{1}{n^3}\,\frac{1}{2}\,n\,(n+1) + \frac{n}{4\,n^3} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{4\,n^2}\,. \end{aligned}$$

Hieraus bekommen wir den Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} S(n) = \frac{1}{3}\,.$$

4b) Es gilt:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Die Riemannschen Summen der Funktion $f(x) = x^2$ konvergieren gegen das Integral.

5a) Kurz:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos(x)} = -\infty\,, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(-\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = -\infty\,.$$

Also:

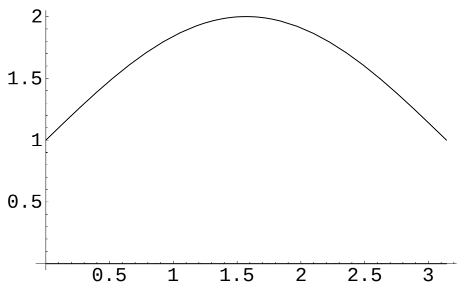
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = -\infty\,.$$

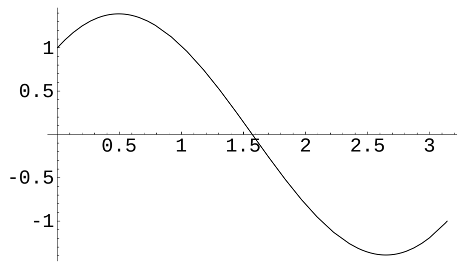
Regel von de l'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right) &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{x - \frac{\pi}{2} - \cos(x)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\, \cos(x)} \right) \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\, \sin(x)} \right)\,.\end{aligned}$$

Der Zähler konvergiert nun gegen 2, der Nenner ist für $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ stets negativ und konvergiert gegen null. Also gilt:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = -\infty\,.$$





Die Funktion $1 + \sin(x)$ (links) und die Funktion $\cos(x) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\, \sin(x)$ rechts

5b) Wir benutzen den Hauptsatz und die Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_0^x \frac{t\, e^{2\,t}}{1+3\,t}\, dt}{e^{2\,x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x\, e^{2\,x}}{1+3\,x}}{2\, e^{2\,x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{2 + 6\,x} = \frac{1}{6}\,.$$

6a) Mit der Exponentialreihe bekommen wir:

$$e^{2\,x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^\nu}{\nu!}\, x^\nu\,, \quad e^x - 1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\, x^\nu\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

6b) Wir berechnen die Ableitung:

$$f'(x) = \frac{2\, e^{2\,x}}{e^x + 1} - \frac{e^{2\,x}}{(e^x + 1)^2}\, e^x = \frac{e^{2\,x}\, (2 + e^x)}{(e^x + 1)^2}\,.$$

Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, sind die Ausdrücke $e^{2\,x}\,(2+e^x) > 0$ und $(e^x+1)^2 > 0$. Insgesamt ist $f'(x) > 0$ und $f(x)$ streng monoton wachsend.
6c) Wir substituieren: $x = \phi(t) = \ln(t) \iff t = \phi^{-1}(x) = e^x$, $t > 0$, und bekommen:

$$\int \frac{e^{2\,x}}{e^x+1}\,dx = \left(\int \frac{t^2}{t+1}\,\frac{1}{t}\,dt\right)_{t=e^x} = \left(\int \frac{t}{t+1}\,dt\right)_{t=e^x}.$$

Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\int \frac{t}{t+1}\,dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\,dt = t - \ln(t+1) + c\,.$$

Damit erhalten wir:

$$\int \frac{e^{2\,x}}{e^x+1}\,dx = e^x - \ln(e^x+1) + c\,.$$