KLAUSUR

Mathematik I (E-Techniker/Mechatroniker/Informatiker/W-Ingenieure)

2.3.2009

(W.Seiler/W.Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Zum Bestehen der Klausur sollten 20 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Bestimmen Sie die Lösungen x_1, x_2, x_3 des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0\,, \\ x_2 + a\,x_3 &= 0\,, \\ a\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 &= b\,. \end{aligned}$$

   (4P)

2. (a) Welche komplexen Zahlen $z = x + y\,i$, $x, y \in \mathbb{R}$ lösen die Gleichung:

$$|z-1| = \Re(z - 3\,i)?$$

   (b) Welche komplexen Zahlen lösen die Gleichung

$$z^5 = 2 - 2\,i?$$

   Skizzieren Sie die Lösungsmenge jeweils in der Gauß-Ebene.
   (c) Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^4 - 2$ in Linearfaktoren.
   (6P)

3. Gegeben sei die Matrix:

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}\,.$$

   (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$(A(\phi))^n = A(n\,\phi)\,, n \in \mathbb{N}\,.$$

   (Additionstheoreme: $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\,\cos(\beta) + \cos(\alpha)\,\sin(\beta)$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\alpha)\,\sin(\beta)$.
   (b) Geben Sie die Elemente der Menge $\{(A(\frac{\pi}{2}))^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ an.
   (8P)

   Bitte wenden!

4. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, und es sei $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$.
(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = g(x)\, e^{(g(x))^2}$ und geben Sie den Wert $f'(0)$ an.
(b) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion $h(x) = \int\limits_{(g(x))^2}^{0} e^{-t^2} dt$ und geben Sie den Wert $h''(0)$ an.
(6P)

5. (a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{x} + 2\,x^2\,, \quad x > 0$. Bestimmen Sie die Extremstelle von f, und geben Sie die folgenden Grenzwerte an: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Skizzieren Sie die Funktion.
(b) Berechnen Sie folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos(x)}$.
(c) Wie lautet das Taylorpolynom $T_4(g, x, 0)$ vom Grad 4 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der Funktion

$$g(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3} \; ?$$

Hinweis: Benutzen Sie die Sinus-Reihe: $\sin(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$.
(8P)

6. (a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \sin(\sqrt{1+x})\, dx\,.$$

Hinweis: Substitution von $t = \sqrt{1+x}$, $x > -1$, dann partielle Integration.
(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, 0)$ vom Grad 2 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,, \quad x > -1\,,$$

und weisen Sie für $0 \le x$ folgende Abschätzung nach:

$$|f(x) - T_2(f, x, 0)| \le \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}\, x^3\,.$$

(8P)

Lösungen

1) Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ a & 2 & 2 & b \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 2-a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2-3\,a & b \end{pmatrix} .$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

$$1.) \quad a = \frac{2}{3}\,, b \neq 0 \quad 2.) \quad a = \frac{2}{3}\,, b = 0 \quad 3.) \quad a \neq \frac{2}{3}\,.$$

1.) Es gibt keine Lösung.

2.) Lösungen lauten: $x_3 = \lambda$, (λ beliebig), $x_2 = -\dfrac{2}{3}\,\lambda$, $x_1 = -\lambda$.

3.) Es gibt genau eine Lösung: $x_3 = \dfrac{b}{2-3\,a}$, $x_2 = -\dfrac{a\,b}{2-3\,a}$, $x_1 = -\dfrac{b}{2-3\,a}$.

2 a) Wir setzen $z = x + y\,i$, $x, y \in \mathbb{R}$, und bekommen:

$$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\,, \quad \Re(z - 3\,i) = x\,,$$

also

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x\,, \quad x \geq 0\,,$$

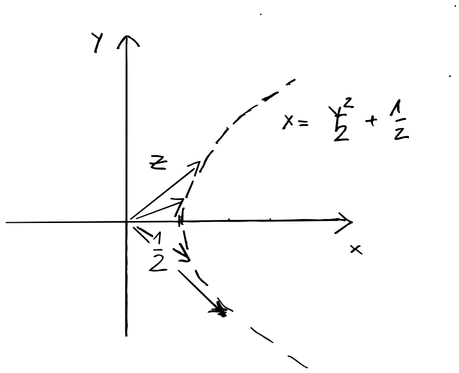
bzw.

$$(x-1)^2 + y^2 = x^2\,.$$

Umformen ergibt:

$$x = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\,.$$

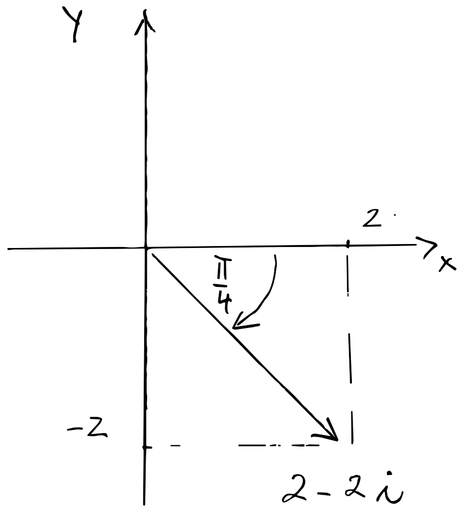
Die Lösungen liegen auf einer Parabel in der Gauß-Ebene.



Die Parabel $x = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}$

2 b) Wir schreiben in Polardarstellung:

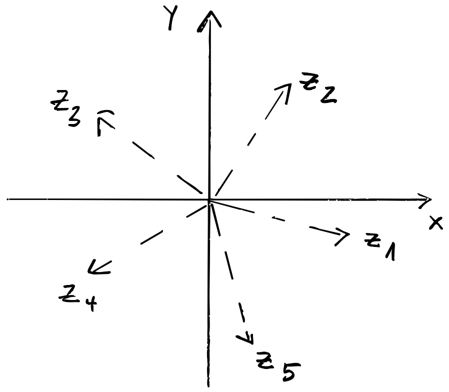
$$2 - 2\,i = \sqrt{8}\,e^{-\frac{\pi}{4}\,i}\,.$$



Die Zahl $2 - 2\,i$

Die Lösungen der Gleichung lauten:

$$z_k = \sqrt[5]{\sqrt{8}}\,e^{-\frac{\pi}{20}\,i + (k-1)\,\frac{2\,\pi}{5}\,i} = \sqrt[10]{8}\,e^{-\frac{\pi}{20}\,i + (k-1)\,\frac{2\,\pi}{5}\,i}\,, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5\,.$$



Die Lösungen der Gleichung $z^5 = 2 - 2\,i$

2 c)

$$p(z) = z^4 - 2 = (z^2 - \sqrt{2})\,(z^2 + \sqrt{2}) = (z - \sqrt[4]{2})\,(z + \sqrt[4]{2})\,(z - \sqrt[4]{2}\,i)\,(z + \sqrt[4]{2}\,i)\,.$$

3a) Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion. Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \cos(1\cdot\phi) & \sin(1\cdot\phi) \\ -\sin(1\cdot\phi) & \cos(1\cdot\phi) \end{pmatrix}\,.$$

Wir nehmen an, die Behauptung sei für ein $n > 1$ richtig und zeigen für $n + 1$:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}^{n+1} \\
= & \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \cos(n\,\phi) & \sin(n\,\phi) \\ -\sin(n\,\phi) & \cos(n\,\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \cos(n\,\phi)\,\cos(\phi) - \sin(n\,\phi)\,\sin(\phi) & \sin(n\,\phi)\,\cos(\phi) + \cos(n\,\phi)\,\sin(\phi) \\ -\sin(n\,\phi)\,\cos(\phi) - \cos(n\,\phi)\,\sin(\phi) & \cos(n\,\phi)\,\cos(\phi) - \sin(n\,\phi)\,\sin(\phi) \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \cos((n+1)\,\phi) & \sin((n+1)\,\phi) \\ -\sin((n+1)\,\phi) & \cos((n+1)\,\phi) \end{pmatrix}\,.
\end{aligned}$$

3b)

$$A(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad (A(\frac{\pi}{2}))^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,,$$

$$(A(\frac{\pi}{2}))^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad (A(\frac{\pi}{2}))^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

4a) Mit der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)\, e^{(g(x))^2} + 2\,(g(x))^2\, g'(x)\, e^{(g(x))^2} \\ &= g'(x)\,(1+2\,(g(x))^2)\, e^{(g(x))^2}\,, \\ f'(0) &= 1\,. \end{aligned}$$

4b) Mit der Kettenregel und dem Hauptsatz folgt:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2\, g(x)\, g'(x)\, e^{-(g(x))^4}\,, \\ h''(x) &= -2\,((g'(x))^2 + g(x)\, g''(x))\, e^{-(g(x))^4} \\ &\quad +8\,(g(x))^4\,(g'(x))^2\, e^{-(g(x))^4}\,, \\ h''(0) &= -2\,. \end{aligned}$$

5a) Wir bestimmen die Extremalstelle:

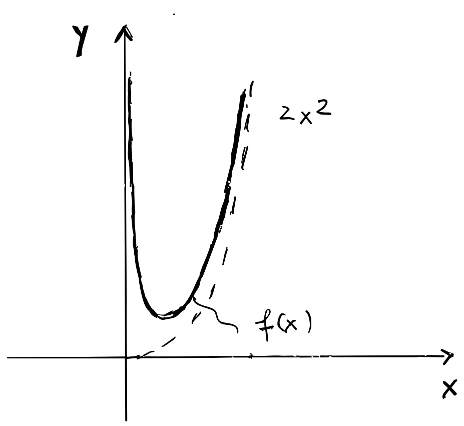
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 4\,x\,, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} + 4\,.$$

Die Bedingung $f'(x_m) = 0$ führt auf die Stelle:

$$x_m = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\,.$$

Es gilt $f''(x_m) = 12 > 0$. Also liegt eine Minimalstelle vor. Wir bekommen folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\,.$$



Skizze der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2\,x^2$, $x > 0$.

5b) Mit der Regel von de l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos(x)} = 2\,.$$

5c) Wir gehen aus von der Sinus-Reihe:

$$\sin(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \, \frac{x^{2\,\nu+1}}{(2\,\nu+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\,.$$

Also beginnt die Entwicklung von $g(x) = \frac{\sin(x)-x}{x^3}$ wie folgt:

$$g(x) = -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \cdots$$

und wir bekommen:

$$T_4(g,x,0) = -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!}\,.$$

6a) Wir bekommen mit $t = \sqrt{1+x}$ und $x = t^2 - 1$:

$$\begin{aligned}
\int \sin(\sqrt{1+x})\,dx &= \left.\int \sin(t)\,2\,t\,dt\right|_{t=\sqrt{1+x}} \\
&= \left. 2\int t\,\sin(t)\,dt\right|_{t=\sqrt{1+x}} \\
&= \left. 2\left(-t\,\cos(t) + \int \cos(t)\,dt\right)\right|_{t=\sqrt{1+x}} \\
&= \left.(-2\,t\,\cos(t) + 2\,\sin(t) + c)\right|_{t=\sqrt{1+x}} \\
&= -2\sqrt{1+x}\,\cos(\sqrt{1+x}) + 2\,\sin(\sqrt{1+x}) + c\,.
\end{aligned}$$

6b) Wir berechnen die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{-\frac{1}{2}}\,, \\
f'(x) &= -\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\,, \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,(1+x)^{-\frac{5}{2}}\,, \\
f'''(x) &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\,(1+x)^{-\frac{7}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$T_2(f, x, 0) = 1 - \frac{1}{2}\, x + \frac{3}{2^2 \cdot 2!}\, x^2$$

und

$$f(x) - T_2(f, x, 0) = \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}\, (1 + \xi_x)^{-\frac{7}{2}}\, x^3$$

mit einer Zwischenstelle $0 < \xi_x < x$. Wegen $0 < \xi_x$ folgt:

$$|f(x) - T_2(f, x, 0)| \leq \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}\, x^3 \,.$$