KLAUSUR

Mathematik I (Nanostrukturwissenschaftler)

2.3.2009

(W.Seiler/W.Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.

Zum Bestehen der Klausur sollten 11 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, und es sei $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$.
(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = g(x)\, e^{(g(x))^2}$ und geben Sie den Wert $f'(0)$ an.
(b) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion $h(x) = \int\limits_{(g(x))^2}^{0} e^{-t^2} dt$
und geben Sie den Wert $h''(0)$ an.
(6P)

2. (a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{x} + 2\,x^2\,, \quad x > 0\,.$ Bestimmen Sie die Extremstelle von f, und geben Sie die folgenden Grenzwerte an: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)\,,$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)\,.$ Skizzieren Sie die Funktion.
(b) Berechnen Sie folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos(x)}\,.$
(c) Wie lautet das Taylorpolynom $T_4(g, x, 0)$ vom Grad 4 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der Funktion
$$g(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3}\,?$$
Hinweis: Benutzen Sie die Sinus-Reihe: $\sin(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\,\nu+1}}{(2\,\nu + 1)!}\,.$
(8P)

3. (a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \sin(\sqrt{1+x})\,dx\,.$
Hinweis: Substitution von $t = \sqrt{1+x}\,, x > -1$, dann partielle Integration.
(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, 0)$ vom Grad 2 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,, x > -1\,,$
und weisen Sie für $0 \leq x$ folgende Abschätzung nach:
$$|f(x) - T_2(f, x, 0)| \leq \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}\, x^3\,.$$
(8P)

Lösungen

1a) Mit der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)\, e^{(g(x))^2} + 2\,(g(x))^2\, g'(x)\, e^{(g(x))^2} \\ &= g'(x)\,(1+2\,(g(x))^2)\, e^{(g(x))^2}\,, \\ f'(0) &= 1\,. \end{aligned}$$

1b) Mit der Kettenregel und dem Hauptsatz folgt:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2\, g(x)\, g'(x)\, e^{-(g(x))^4}\,, \\ h''(x) &= -2\,((g'(x))^2 + g(x)\, g''(x))\, e^{-(g(x))^4} \\ &\quad +8\,(g(x))^4\,(g'(x))^2\, e^{-(g(x))^4}\,, \\ h''(0) &= -2\,. \end{aligned}$$

2a) Wir bestimmen die Extremalstelle:

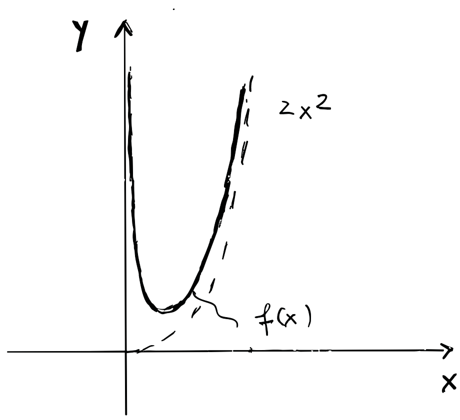
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 4\,x\,, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} + 4\,.$$

Die Bedingung $f'(x_m) = 0$ führt auf die Stelle:

$$x_m = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\,.$$

Es gilt $f''(x_m) = 12 > 0$. Also liegt eine Minimalstelle vor. Wir bekommen folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\,.$$



Skizze der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2\,x^2$, $x > 0$.

2b) Mit der Regel von de l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos(x)} = 2\,.$$

2c) Wir gehen aus von der Sinus-Reihe:

$$\sin(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}\, \frac{x^{2\,\nu+1}}{(2\,\nu+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\,.$$

Also beginnt die Entwicklung von $g(x) = \frac{\sin(x)-x}{x^3}$ wie folgt:

$$g(x) = -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \cdots$$

und wir bekommen:

$$T_4(g,x,0) = -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!}\,.$$

3a) Wir bekommen mit $t = \sqrt{1+x}$ und $x = t^2 - 1$:

$$\begin{aligned}
\int \sin(\sqrt{1+x})\,dx &= \int \sin(t)\,2\,t\,dt\Big|_{t=\sqrt{1+x}} \\
&= 2\int t\,\sin(t)\,dt\Big|_{t=\sqrt{1+x}} \\
&= 2\left(-t\,\cos(t) + \int \cos(t)\,dt\right)\Big|_{t=\sqrt{1+x}} \\
&= (-2\,t\,\cos(t) + 2\,\sin(t))\big|_{t=\sqrt{1+x}} \\
&= -2\sqrt{1+x}\,\cos(\sqrt{1+x}) + 2\,\sin(\sqrt{1+x})\,.
\end{aligned}$$

3b) Wir berechnen die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{-\frac{1}{2}}\,, \\
f'(x) &= -\frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}\,, \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,(1+x)^{-\frac{5}{2}}\,, \\
f'''(x) &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\,(1+x)^{-\frac{7}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$T_2(f,x,0) = 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2^2 \cdot 2!}\,x^2$$

und

$$f(x) - T_2(f,x,0) = \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}\,(1+\xi_x)^{-\frac{7}{2}}\,x^3$$

mit einer Zwischenstelle $0 < \xi_x < x$. Wegen $0 < \xi_x$ folgt:

$$|f(x) - T_2(f,x,0)| \leq \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}\,x^3\,.$$