KLAUSUR

Mathematik I (Nanostrukturwissenschaftler)

1.9.2009

(W. Seiler / W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Zum Bestehen der Klausur sollten 11 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2\,n+1)\,(n+1)\,n}{6}\,.$$
(b) Berechnen Sie den Grenzwert:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3}\,.$$
(6P)

2. Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
(a) Berechnen Sie die Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.
(b) Berechnen Sie die Extremalstellen der Funktion f.
(c) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Intervall $[0,1]$ streng monoton wachsend ist. Wie lautet die Umkehrfunktion der eingeschränkten Funktion
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
(8P)

3. (a) Berechnen Sie das Integral:
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\,x^3\,dx\,.$$
Hinweis: Substitution von $t = x^2$, dann partielle Integration.
(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 11 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der Funktion
$$f(x) = \cos(x^2)\,x^3\,.$$
Hinweis: Benutzen Sie die Reihe: $\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\dfrac{x^{2\,k}}{(2\,k)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
(8P)

Lösungen

1a) Induktionsanfang:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6}\,.$$

Induktionsannahme: Für ein beliebiges $n > 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2\,n+1)\,(n+1)\,n}{6}\,.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{(2\,n+1)\,(n+1)\,n}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\,\frac{(2\,n+1)\,n + 6\,(n+1)}{6} = (n+1)\,\frac{(2\,n+3)\,(n+2)}{6} \\ &= \frac{(2\,(n+1)+1)\,((n+1)+1)\,(n+1)}{6}\,.\end{aligned}$$

1b) Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\,n+1)\,(n+1)\,n}{6\,n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}\,.$$

2a) Es gilt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2\,x} = 0\,.$$

2b) Wir berechnen die ersten Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1 + x^2 - x\,2\,x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,,$$

$$f''(x) = \frac{-2\,x\,(1+x^2)^2 - (1-x^2)\,2\,(1+x^2)\,2\,x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2\,x\,(3-x^2)}{(1+x^2)^3}\,.$$

Hieraus entnimmt man:

$$f'(x) = 0 \iff x_1 = -1, x_2 = 1\,,$$

und

$$f''(-1) > 0\,, \quad f''(1) < 0\,.$$

Wir haben ein Minimum bei $x_1 = -1$ und ein Maximum bei $x_2 = 1$.

2c) Aus $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ sieht man: $f'(x) > 0$ im Intervall $(0,1)$. Damit ist f streng monoton wachsend mit $f([0,1]) = [0, \frac{1}{2})$. Wir berechnen die Umkehrfunktion aus:

$$\frac{x}{1+x^2} = y$$

bzw.

$$x^2 - \frac{x}{y} + 1 = 0$$

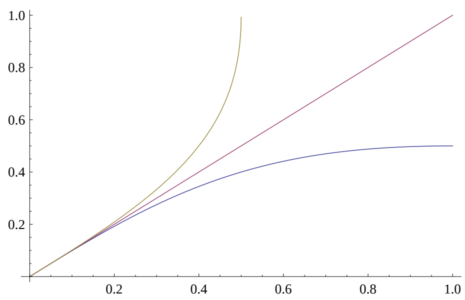
mit der Lösung:

$$x = \frac{1}{2\,y} \pm \sqrt{\frac{1}{4\,y^2} - 1}\,.$$

Die Umkehrfunktion lautet:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2\,x} - \sqrt{\frac{1}{4\,x^2} - 1}\,.$$

(Das Pluszeichen würde zum Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x) = \infty$ führen. Es gilt aber $\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x) = 0$).



Die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in [0,1]$, mit ihrer Umkehrfunktion.

3a) Die Substitution $x = \sqrt{t}$ ergibt:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, x^3\, dx = \int_0^{\pi} \cos(t)\, t^{\frac{3}{2}}\, \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(t)\, t\, dt\,.$$

Partielle Integration liefert:

$$\int\limits_0^{\pi} \cos(t)\, t\, dt = \sin(t)\, t\big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin(t)\, dt = \cos(t)\big|_0^{\pi} = -2\,.$$

Also:

$$\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, x^3\, dx = -1\,.$$

Anderer Weg:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, x^3\, dx &= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, 2\, x\, x^2\, dx \\
&= \frac{1}{2} \sin(x^2)\, x^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\, 2\, x\, dx \\
&= \frac{1}{2} \sin(x^2)\, x^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2} \cos(x^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi}} \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1\,.
\end{aligned}$$

3b) Es gilt:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2\,k}}{(2\,k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\,.$$

Damit bekommen wir

$$\cos(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4\,k}}{(2\,k)!} = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} + \cdots$$

und

$$f(x) = \cos(x^2)\, x^3 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4\,k+3}}{(2\,k)!} = x^3 - \frac{x^7}{2} + \frac{x^{11}}{24} + \cdots\,,$$

also

$$T_{11}(f, x, 0) = x^3 - \frac{x^7}{2} + \frac{x^{11}}{24}\,.$$