

KLAUSUR

Mathematik II (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

13.3.2006

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch- Nr.:
-------	----------	------------------------	------------------

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)
----	----	----	----	----	----

Punkte:	Note:
---------	-------

**Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.**

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ($f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$), wird festgelegt durch folgende Vorgaben:

$$f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_2) = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Dabei sind $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, die kanonischen Basisvektoren des \mathbb{R}^3 .

Welches Bild besitzt der Vektor $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ bzw. der Vektor $\vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$ unter der Abbildung f ?

Wie lautet die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis des \mathbb{R}^3 ?

2. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

(a, b, c_1, c_2, c_3 sind beliebig gewählte reelle Zahlen).

Unter welcher Bedingung ist das System eindeutig lösbar?

Unter welcher Bedingung ist das System nicht lösbar?

Unter welcher Bedingung ist das System lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?

Wie groß ist jeweils der Rang der Systemmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}?$$

3. Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Geben Sie eine Matrix B an, sodass die Matrix $B^{-1} A B$ eine Diagonalmatrix wird. Welche Diagonalmatrix ergibt sich?

Bitte wenden!

4. Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{\nu}}{\nu} x^{\nu}.$$

Welche Reihen ergeben sich, wenn man $x = \rho$ bzw. $x = -\rho$ setzt? Konvergieren diese Reihen?

5. In welchem Punkt nimmt die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a > 0, b > 0.$$

eine Extremalstelle an? Durch die Gleichung

$$f(x, y) = 1$$

wird eine Ellipse gegeben. Geben Sie in einem beliebigen Ellipsenpunkt (x_0, y_0) einen Richtungsvektor der Tangente an die Ellipse. Benutzen Sie dazu den Gradienten von f .

6. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{Kr} (x^2 + y^2) d(x, y)$$

über den Kreisring $Kr \subset \mathbb{R}^2$, der durch folgende Ungleichungen beschrieben wird ($0 < r_1 < r_2$):

$$r_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_2.$$

(Hinweis: Polarkoordinaten, Funktionaldeterminante = r).

Lösungen

1) Wir bekommen:

$$f(\vec{a}) = f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_2) = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (-2, 3, -2)$$

und

$$f(\vec{b}) = f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (2, 2, -1).$$

Die Matrix von f lautet:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Wir formen um mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 - 2a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_2 - ac_1 \end{pmatrix}$$

Das System ist eindeutig lösbar, genau dann wenn $a \neq 1$.

Das System ist nicht lösbar, genau dann wenn $a = 1$ und $c_2 \neq c_1$.

Das System ist lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, genau dann wenn $a = 1$ und $c_2 = c_1$. Der Rang der Systemmatrix beträgt im ersten Fall: 3 und in den beiden anderen Fällen: 2.

3) Die Matrix A besitzt das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 1$$

und die Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

Eine Basis des Eigenraums von λ_1 ergibt sich aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $(1, -1)$.

Eine Basis des Eigenraums von λ_2 ergibt sich aus:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $(1, 1)$.

Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

überführt A in die Diagonalmatrix:

$$B^{-1} A B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Es ist $B^{-1} = B^T$).

4) Wir haben Koeffizienten:

$$a_\nu = \frac{2^\nu}{\nu}, \quad a_{\nu+1} = \frac{2^{\nu+1}}{\nu+1},$$

und

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \right| = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{2\nu}{\nu+1} = 2.$$

Damit lautet der Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{2}.$$

Alternative:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[\nu]{\nu}} = 2.$$

Für $x = \frac{1}{2}$ ergibt sich:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^\nu}{\nu} \left(\frac{1}{2}\right)^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}.$$

Das ist die harmonische Reihe, die divergiert.

Für $x = -\frac{1}{2}$ ergibt sich:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^\nu}{\nu} \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}.$$

Das ist die (mit -1 multiplizierte) alternierende harmonische Reihe, die bedingt konvergiert.

5) Wir berechnen:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(\frac{2}{a^2} x, \frac{2}{b^2} y \right) \quad \text{und} \quad H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Als Extremalstelle kommt nur der Nullpunkt infrage. Es liegt ein Minimum vor, wegen

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{2}{a^2} > 0 \quad \text{und} \quad \det H(0, 0) = \frac{4}{a^2 b^2} > 0.$$

Die Ellipse $f(x, y) = 1$ stellt eine Höhenlinie der Funktion f dar. Der Gradient steht senkrecht auf Höhenlinien. Vom Nullvektor verschiedene Vektoren, die auf dem Gradienten senkrecht stehen, geben Tangentenrichtungen. Wir wählen den Vektor:

$$\left(\frac{1}{b^2} y_0, -\frac{1}{a^2} x_0 \right).$$

6) Mit ebenen Polarkoordinaten

$$x = r \cos(\phi), \quad y = r \sin(\phi),$$

beschreiben wir den Kreisring durch:

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \int_{Kr} (x^2 + y^2) d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (r^2 (\cos(\phi))^2 + r^2 (\sin(\phi))^2) r dr d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr d\phi = \frac{1}{2} \pi (r_2^4 - r_1^4). \end{aligned}$$