KLAUSUR

Mathematik II (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

13.9.2006

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an!
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wird festgelegt durch folgende Vorgaben:

$$f(1,0,0) = (2,-1)\,, \quad f(0,1,0) = (-2,1)\,, \quad f(0,0,1) = (0,0)\,.$$

(a) Wie lautet die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$?
(b) Geben Sie eine Basis des Kerns (Nullraums) von f.
(c) Wie lautet die Matrix von f bezüglich der Basis $\vec{\tilde{b}}_1 = (1,0,0)$, $\vec{\tilde{b}}_2 = (1,2,0)$, $\vec{\tilde{b}}_3 = (3,2,1)$ im $\mathbb{R}^3$ und der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^2$? (Angabe der Matrix in Produktform genügt).

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A durch Entwickeln nach der zweiten Zeile.
(b) Kann man a, b, c so wählen, dass die Zeilenvektoren

$$\vec{z}_1 = (a,1,1)\,, \quad \vec{z}_2 = (1,b,1)\,, \quad \vec{z}_3 = (1,1,c)\,,$$

paarweise senkrecht stehen: $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = 0$, $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_3 = 0$, $\vec{z}_2 \cdot \vec{z}_3 = 0$?
(c) Wie groß ist der Rang von A im Fall $a = 1$?

3. Wie lautet das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}?$$

Berechnen Sie die Potenzen A^n, ($n \in \mathbb{N}$).

Bitte wenden!

4. (a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 - 3\,x}$$

in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$ und geben Sie den Konvergenzradius an.
(b) Geben Sie das Taylorpolynom vom Grad 3 der Funktion

$$F(x, y) = \frac{1}{(1 - 3\,x)\,(1 - 3\,y)}$$

um $(x_0, y_0) = (0, 0)$ an. Hinweis: (a) benutzen.

5. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = -\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\,.$$

(a) Beschreiben Sie die Höhenlinien von f (Skizze).
(b) Geben Sie die Richtungsableitung von f in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e} = (e_1, e_2)$ im Punkt $(2, 3)$ an.
(c) In welche Richtung $\vec{e}$ muss man im Punkt $(2, 3)$ ableiten, damit die Richtungsableitung maximal wird. In welche Richtung $\vec{e}$ muss man im Punkt $(2, 3)$ ableiten, damit die Richtungsableitung null wird.

6. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{-(x-1)^2+1} x\,dy \right) dx\,.$$

Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge bei dem gegebenen Integral. (Die Integration muss nicht mehr ausgeführt werden).

Lösungen

1) (a) Die Matrix von f lautet:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Das System

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt die Lösung:

$$(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_3), \quad \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Wir geben folgende Basis:

$$(1,1,0), \quad (0,0,1).$$

(c) Die Matrix bezüglich der neuen Basis im $\mathbb{R}^3$ lautet:

$$\tilde{M}(f) = M(f) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) (a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} &= (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} + b \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -(c-1) + b\,(a\,c - 1) - (a-1) = 2 - a - b - c + a\,b\,c. \end{aligned}$$

(b) Die Bedingungen $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = 0$, $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_3 = 0$, $\vec{z}_2 \cdot \vec{z}_3 = 0$, nehmen folgende Gestalt an:

$$a + b + 1 = 0, \quad a + 1 + c = 0, \quad 1 + b + c = 0,$$

bzw.

$$a + b = -1, \quad a + c = -1, \quad b + c = -1.$$

Dieses System ist eindeutig lösbar:

$$a = b = c = -\frac{1}{2}.$$

(c) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}, \quad b, c \in \mathbb{R},$$

wird ranggleich umgeformt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}.$$

Der Rang beträgt 3 für $b \neq 1$ und $c \neq 1$. (Vgl. $\det(A) = 1 - b - c + b\,c = (b-1)\,(c-1) \neq 0$).
Der Rang beträgt 2 für $b \neq 1$ und $c = 1$ oder $b = 1$ und $c \neq 1$.
Der Rang beträgt 1 für $b = 1$ und $c = 1$.

3) Die Matrix A besitzt das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda\,E) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\,(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 3\,\lambda\,.$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt:

$$A^2 - 3\,A = O\,,$$

bzw.

$$A^2 = 3\,A\,.$$

Wir bekommen also:

$$A^1 = A\,, \quad A^2 = 3\,A\,, \quad A^3 = 3\,A^2 = 3^2\,A\,, \quad A^4 = 3^2\,A^2 = 3^3\,A\,, \quad \ldots, A^n = 3^{n-1}\,A\,.$$

4) (a) Mit der geometrischen Reihe bekommen wir:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 3^\nu \, x^\nu \,, \quad |x| < \frac{1}{3} \,.$$

(b) Wir multiplizieren die geometrischen Reihen:

$$F(x,y) = f(x)\, f(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} 3^\nu \, 3^\mu \, x^\nu \, y^\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} 3^\mu \, 3^{\nu-\mu} \, x^\mu \, y^{\nu-\mu} \right) \,,$$

bzw.

$$F(x,y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 3^\nu \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} x^\mu \, y^{\nu-\mu} \right) \,, \quad |x| < \frac{1}{3} \,, |y| < \frac{1}{3} \,.$$

Hieraus entnehmen wir das Taylorpolynom vom Grad 3:

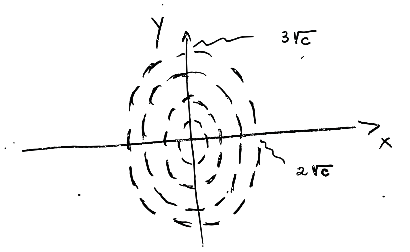
$$1 + 3\,x + 3\,y + 9\,x^2 + 9\,x\,y + 9\,y^2 + 27\,x^3 + 27\,x^2\,y + 27\,x\,y^2 + 27\,y^3 \,.$$

Alternative: partielle Ableitungen bis zur Ordnung 3 berechnen, an der Stelle $(0,0)$ auswerten und Taylorpolynom aufstellen.

5) (a) Die Höhenlinien werden gegeben durch die Ellipsen

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = c \,, c > 0 \,,$$

mit den Halbachsen $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$. Auf den Ellipsen gilt: $f(x,y) = -c$.



(b) Wir berechnen den Gradienten:

$$grad\, f(x,y) = \left(-\frac{x}{2}, -\frac{2\,y}{9} \right) \,,$$

bzw.

$$grad\, f(2,3) = \left(-1, -\frac{2}{3} \right) = -\left(1, \frac{2}{3} \right) \,,$$

Die Richtungsableitung von f im Punkt $(2,3)$ in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e} = (e_1, e_2)$ lautet:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(2,3) = grad\, f(2,3) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = -e_1 - \frac{2}{3}\, e_2 = -\left(e_1 + \frac{2}{3}\, e_2\right) .$$

(c) Damit die Richtungsableitung maximal wird, muss man in folgende Richtung ableiten:

$$\vec{e} = \frac{grad\, f(2,3)}{||grad\, f(2,3)||} = \frac{\left(-1, -\frac{2}{3}\right)}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \left(-1, -\frac{2}{3}\right) .$$

(Richtung des Gradienten). Damit die Richtungsableitung null wird, muss man in folgende Richtungen ableiten:

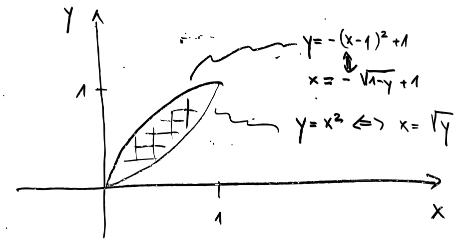
$$\vec{e} = \pm \frac{3}{\sqrt{13}} \left(-\frac{2}{3}, 1\right) .$$

(Richtungen senkrecht zum Gradienten).
6) Ausführen der Integration ergibt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{-(x-1)^2+1} x\, dy \right) dx &= \int\limits_0^1 (x\, y)\Big|_{y=x^2}^{y=-(x-1)^2+1}\, dx \\
&= \int\limits_0^1 \left(x\,(-(x-1)^2+1) - x\, x^2\right)\, dx \\
&= \int\limits_0^1 \left(2\, x^2 - 2\, x^3\right)\, dx = \frac{1}{6} .
\end{aligned}$$

In der anderen Reihenfolge lautet das Integral:

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-\sqrt{1-y}+1}^{\sqrt{y}} x\, dx \right) dy .$$


Y
X
1
1
$y = -(x-1)^2 + 1$
$\Updownarrow$
$x = -\sqrt{1-y} + 1$
$y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$