KLAUSUR

Mathematik II (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

13.3.2007

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, wird festgelegt durch folgende Vorgaben:

   $$f(\vec{e}_1) = 2\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\,, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\,, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3\,.$$

   Dabei sind $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$, die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$.
   Wie lautet die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$? Welchen Rang besitzt f? Welche Dimension besitzt der Kern (Nullraum) von f?
   Welche Matrix ergibt sich für f, wenn folgende Basis zugrunde gelegt wird:

   $$\vec{b}_1 = 3\,\vec{e}_1\,, \vec{b}_2 = \vec{e}_2\,, \vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3\,?$$

   (Es genügt, die Matrix in Produktform anzugeben).

2. Gegeben sei die Matrix:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & a+1 & a-1 & 3\,a \\ a & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

   Bestimmen Sie den Rang von A.

3. Gegeben sei die Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

   Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\,a & 1 \end{pmatrix}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

   Wie muss man a wählen, damit A^n zwei linear unabhängige Eigenvektoren besitzt?

   Bitte wenden!

4. (a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{5 - 2\,x}$$

in eine Taylorreihe um $x_0 = 0$. Geben Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe an.

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu!}{\nu^{\nu}}\, x^{\nu}\,.$$

(Hinweis: Quotientenkriterium und $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = e$ verwenden).

5. (a) Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 + 3\,x\,y + y^2$$

Extremalstellen?

(b) Welche Punkte kommen als Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$$

infrage?

6. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_D x\, d(x, y)$$

über den Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$, der durch folgende Ungleichungen beschrieben wird:

$$0 \le x \le 1\,, 0 \le y \le -3\,x + 3\,.$$

(b) Berechnen Sie das Integral:

$$\int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy\,, \quad R > 0\,.$$

(Hinweis: Polarkoordinaten, Funktionaldeterminante $= r$).

Lösungen

1) Die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis lautet:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir formen um:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und lesen ab:

$$\mathrm{Rg}(f) = 2\,.$$

Nach der Dimensionformel $3 - \mathrm{Rg}(f) =$ Dim(Kern(f)) hat der Kern die Dimension 1.
Bezüglich der neuen Basis bekommen wir die Matrix

$$B^{-1}\,M\,B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\,, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Wir formen um mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & a+1 & a-1 & 3\,a \\ a & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-2 & -2\,a-1 & 3\,a-6 \\ 0 & -a+2 & -a^2+1 & -2\,a+2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-2 & -2\,a-1 & 3\,a-6 \\ 0 & 0 & -a^2-2\,a & a-4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-2 & -2\,a-1 & 3\,(a-2) \\ 0 & 0 & -a\,(a+2) & a-4 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die letzte ranggleiche Version von A.
Für $a \neq 2$ und für $a \neq 4$ beträgt der Rang 3. (Spalten 1,2,4 sind unabhängig).
Für $a = 2$ beträgt der Rang 3. (Spalten 1,3,4 sind unabhängig).
Für $a = 4$ beträgt der Rang 3. (Spalten 1,2,3 sind unabhängig).

3) Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig. Nehnem wir an, für ein beliebiges $n > 1$ gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\,a & 1 \end{pmatrix} .$$

Mit der Induktionsannahme folgt:

$$A^{n+1} = A\,A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\,a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\,a + a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)\,a & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix A^n besitzt das charakteristische Polynom:

$$\det(A^n - \lambda\,E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ n\,a & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$$

und den doppelten Eigenwert: $\lambda_1 = 1$.
Zugehörige Eigenwerte ergeben sich sich aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n\,a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Genau dann wenn $a = 0$ ist, besitzt A^n zwei linear unabhängige Eigenvektoren.
4) (a) Wir formen um

$$\frac{1}{5 - 2\,x} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{1 - \frac{2}{5}\,x}$$

und bekommen mit der geometrischen Reihe für $|x| < \frac{5}{2}$:

$$f(x) = \frac{1}{5}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^\nu}{5^\nu}\,x^\nu .$$

(b) Wir haben Koeffizienten:

$$a_\nu = \frac{\nu!}{\nu^\nu}\,, \quad a_{\nu+1} = \frac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{\nu+1}}\,,$$

und

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \frac{(\nu+1)!}{\nu!}\,\frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^{\nu+1}} = \frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^\nu} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} .$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \frac{1}{e}$$

und der Konvergenzradius lautet: $\rho = e$.

5) (a) Wir berechnen:

$$\mathrm{grad} f(x,y) = (2\,x + 3\,y, 3\,x + 2\,y)\,.$$

Als Extremalstelle kommt nur der Nullpunkt infrage. Wegen

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\det H(0,0) = -5$$

und es liegt ein Sattelpunkt vor.

(b) Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ müssen die folgenden Bedingungen mit dem Lagrange-Multiplikator λ efüllen:

$$(1)\ x^2 + y^2 = 1\,, \quad (2)\ 2\,x + 3\,y + \lambda\,2\,x = 0\,, \quad (3)\ 3\,x + 2\,y + \lambda\,2\,y = 0\,.$$

Wäre $x = 0$, so ergäbe sich aus (2) $y = 0$ im Widerspruch zu (1). Wäre $y = 0$, so ergäbe sich aus (3) $x = 0$ im Widerspruch zu (1). Der Nullpunkt kommt also nicht infrage. Wir multiplizieren (2) mit y und (3) mit x:

$$2\,x\,y + 3\,y^2 + \lambda\,2\,x\,y = 0\,, \quad 3\,x^2 + 2\,x\,y + \lambda\,2\,x\,y = 0\,,$$

bzw.

$$3\,x^2 = 3\,y^2\,.$$

Hieraus folgt $y = \pm x$ und $2\,y^2 = 1$. Als Extremalstellen von f unter $g(x,y) = 1$ kommen also folgende Punkte infrage:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,, \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,, \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,, \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,.$$

6) (a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_D x\,d(x,y) &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{-3\,x+3} x\,dy\,dx \\
&= \int\limits_0^1 (x\,y)\big|_{y=0}^{y=-3\,x+3}\,dx = \int\limits_0^1 x\,(-3\,x+3)\,dx \\
&= \int\limits_0^1 (-3\,x^2 + 3\,x)\,dx = \left(-x^3 + \frac{3}{2}\,x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(b) Der Integrationsbereich stellt einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius R dar. Mit ebenen Polarkoordinaten

$$x = r\,\cos(\phi)\,, \quad y = r\,\sin(\phi)\,,$$

beschreiben wir den Kreis durch:

$$0 \leq r \leq R\,, \quad 0 \leq \phi \leq 2\,\pi\,.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy &= \int\limits_{0}^{2\,\pi} \int\limits_{0}^{R} \sqrt{R^2 - r^2}\,r\,dr\,d\phi \\
&= \int\limits_{0}^{2\,\pi} \left(-\frac{1}{3}\,(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_{r=0}^{r=R} d\phi = \frac{2\,\pi}{3}\,R^3\,.
\end{aligned}$$