KLAUSUR

Mathematik II (Informatiker)

13.3.2007

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, wird festgelegt durch folgende Vorgaben:

   $$f(\vec{e}_1) = 2\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\,, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\,, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3\,.$$

   Dabei sind $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$, die kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$.
   Wie lautet die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$? Welchen Rang besitzt f? Welche Dimension besitzt der Kern (Nullraum) von f?
   Welche Matrix ergibt sich für f, wenn folgende Basis zugrunde gelegt wird:

   $$\vec{b}_1 = 3\,\vec{e}_1\,, \vec{b}_2 = \vec{e}_2\,, \vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3\,?$$

   (Es genügt, die Matrix in Produktform anzugeben).

2. Gegeben sei die Matrix:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & a+1 & a-1 & 3\,a \\ a & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

   Bestimmen Sie den Rang von A.

3. Gegeben sei die Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

   Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\,a & 1 \end{pmatrix}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

   Wie muss man a wählen, damit A^n zwei linear unabhängige Eigenvektoren besitzt?

Lösungen

1) Die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis lautet:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir formen um:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und lesen ab:

$$\mathrm{Rg}(f) = 2\,.$$

Nach der Dimensionformel $3 - \mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Dim(Kern(f))}$ hat der Kern die Dimension 1.
Bezüglich der neuen Basis bekommen wir die Matrix

$$B^{-1}\,M\,B\,, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

2) Wir formen um mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & a+1 & a-1 & 3\,a \\ a & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-2 & -2\,a-1 & 3\,a-6 \\ 0 & -a+2 & -a^2+1 & -2\,a+2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-2 & -2\,a-1 & 3\,a-6 \\ 0 & 0 & -a^2-2\,a & a-4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-2 & -2\,a-1 & 3\,(a-2) \\ 0 & 0 & -a\,(a+2) & a-4 \end{pmatrix} .$$

Wir betrachten die letzte ranggleiche Version von A.
Für $a \neq 2$ und für $a \neq 4$ beträgt der Rang 3. (Spalten 1,2,4 sind unabhängig).
Für $a = 2$ beträgt der Rang 3. (Spalten 1,3,4 sind unabhängig).
Für $a = 4$ beträgt der Rang 3. (Spalten 1,2,3 sind unabhängig).

3) Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig. Nehnem wir an, für ein beliebiges $n > 1$ gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\,a & 1 \end{pmatrix} .$$

Mit der Induktionsannahme folgt:

$$A^{n+1} = A\,A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\,a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\,a + a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)\,a & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix A^n besitzt das charakteristische Polynom:

$$\det(A^n - \lambda\,E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ n\,a & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$$

und den doppelten Eigenwert: $\lambda_1 = 1$.
Zugehörige Eigenwerte ergeben sich sich aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n\,a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Genau dann wenn $a = 0$ ist, besitzt A^n zwei linear unabhängige Eigenvektoren.