KLAUSUR

Mathematik II (Informatiker)

11.9.2008

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ wird festgelegt durch:
$$f(\vec{a}_1) = \vec{b}_1 + 3\,\vec{b}_2\,, \quad f(\vec{a}_2) = 2\,\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 3\,\vec{b}_3\,.$$
Dabei ist $\vec{a}_1 = (1,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und
$\vec{b}_1 = (1,0,0)$, $\vec{b}_2 = (0,1,0)$, $\vec{b}_3 = (0,0,1)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.
Wie lautet die Matrix der Abbildung f bezüglich dieser Basen?
Wie lautet die Matrix der Abbildung f bezüglich der Basen
$\vec{\tilde{a}}_1 = 2\,\vec{a}_1 + \vec{a}_2\,, \vec{\tilde{a}}_2 = 3\,\vec{a}_2$ im $\mathbb{R}^2$ und $\vec{\tilde{b}}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_3\,, \vec{\tilde{b}}_2 = \vec{b}_2\,, \vec{\tilde{b}}_3 = \vec{b}_1$ im $\mathbb{R}^3$?

2. (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & b & b \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix}\,, \quad a,b,c \in \mathbb{R}\,, \quad a \neq 0\,, b \neq 1\,,$$
durch Überführen von A in eine Dreiecksmatrix mit Zeilenoperationen.
(b) Zeigen Sie (für $a,b,c,a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2,a_3,b_3,c_3 \in \mathbb{R}$):
$$\det\begin{pmatrix} a & b & c & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{pmatrix}\,.$$
(Hinweis: Beginnen Sie mit der Zeilenoperation $\vec{z}_1 \rightsquigarrow \vec{z}_1 - \vec{z}_2$).

3. Gegeben sei die Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$
Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.
Welche Beziehung ergibt sich für A aus dem Satz von Cayley-Hamilton?
Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:
$$A^n = \frac{1}{3}\,(2 + (-2)^n)\,E - \frac{1}{3}\,(-1 + (-2)^n)\,A\,.$$
(E ist die 2×2-Einheitsmatrix).

Lösungen

1) Bezüglich der kanonischen Basen bekommen wir folgende Matrix:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Wir rechnen die Bilder der neuen Basisvektoren aus:

$$\begin{aligned} f(\vec{\tilde{a}}_1) &= 2\,f(\vec{a}_1) + f(\vec{a}_2) \\ &= 2\,(\vec{b}_1 + 3\,\vec{b}_2) + 2\,\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 3\,\vec{b}_3 \\ &= 4\,\vec{b}_1 + 5\,\vec{b}_2 + 3\,\vec{b}_3 \\ &= 4\,\vec{\tilde{b}}_3 + 5\,\vec{\tilde{b}}_2 + 3\,(\vec{\tilde{b}}_1 - \vec{\tilde{b}}_3) \\ &= 3\,\vec{\tilde{b}}_1 + 5\,\vec{\tilde{b}}_2 + \vec{\tilde{b}}_3\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\vec{\tilde{a}}_2) &= 3\,f(\vec{a}_2) \\ &= 6\,\vec{b}_1 - 3\,\vec{b}_2 + 9\,\vec{b}_3 \\ &= 6\,\vec{\tilde{b}}_3 - 3\,\vec{\tilde{b}}_2 + 9\,(\vec{\tilde{b}}_1 - \vec{\tilde{b}}_3) \\ &= 9\,\vec{\tilde{b}}_1 - 3\,\vec{\tilde{b}}_2 - 3\,\vec{\tilde{b}}_3\,. \end{aligned}$$

Bezüglich der neuen Basen bekommen wir folgende Matrix:

$$\tilde{M}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 5 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

Anderer Weg mit Basisübergangsmatrizen:

$$\tilde{M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} M(f) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 5 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

2a) Für $a \neq 0$ bekommen wir folgende Matrix mit gleicher Determinante:

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b-1 & b-1 \\ 0 & 1 & c-1 \end{pmatrix} .$$

($\vec{z}_2 \rightsquigarrow z_2 - \frac{1}{a}\,\vec{z}_1$, $\vec{z}_3 \rightsquigarrow z_3 - \frac{1}{a}\,\vec{z}_1$).
Für $b \neq 1$ bekommen wir folgende Matrix mit gleicher Determinante:

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b-1 & b-1 \\ 0 & 0 & c-2 \end{pmatrix}.$$

($\vec{z}_3 \rightsquigarrow z_3 - \frac{1}{b-1}\,\vec{z}_2$).
Die Dreiecksmatrix liefert:

$$\det(A) = a\,(b-1)\,(c-2)\,.$$

2b) Mit den Rechenregeln für Determinanten und durch Entwickeln nach der vierten Spalte bekommen wir:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a & b & c & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 & 0 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)\,(2-\lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2\,.$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt:

$$A^2 + A - 2\,E = O \quad \text{bzw.} \quad A^2 = 2\,E - A\,.$$

Für $n = 2$ haben wir den Induktionsanfang:

$$A^2 = \frac{1}{3}\,(2 + (-2)^2)\,E - \frac{1}{3}\,(-1 + (-2)^2)\,A = 2\,E - A\,.$$

Nehmen wir an, die Behauptung gilt für ein $n > 2$, dann folgt wieder mit dem

Satz von Cayley-Hamilton:

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= \frac{1}{3}\left(2+(-2)^n\right)A - \frac{1}{3}\left(-1+(-2)^n\right)A^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(2+(-2)^n\right)A - \frac{1}{3}\left(-1+(-2)^n\right)(2\,E - A) \\
&= -\frac{1}{3}\left(-1+(-2)^n\right)2\,E + \left(\frac{1}{3}\left(2+(-2)^n\right) + \frac{1}{3}\left(-1+(-2)^n\right)\right)\,A \\
&= -\frac{1}{3}\left(-2-(-2)\,(-2)^n\right)E + \frac{1}{3}\left(1-(-2)\,(-2)^n\right)A \\
&= \frac{1}{3}\left(2+(-2)^{n+1}\right)E - \frac{1}{3}\left(-1+(-2)^{n+1}\right)A\,.
\end{aligned}
$$