KLAUSUR

Mathematik II (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

12.3.2009

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr./Studiengang:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Die Vektoren

$$\vec{a}_1 = (1, -1, 0)\,, \quad \vec{a}_2 = (-1, 0, 1)\,,$$

spannen einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ auf. Geben Sie eine Orthonormalbasis des Unterraums an.
(b) Wir betrachten die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)\,, \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0)\,, \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\,.$$

Wie lauten die Übergangsmatrizen von der kanoischen Basis zur Basis

$$\vec{\tilde{b}}_1 = 2\,\vec{e}_1\,, \quad \vec{\tilde{b}}_2 = 2\,\vec{e}_2\,, \quad \vec{\tilde{b}}_3 = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3\,,$$

und umgekehrt?

2. Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Geben Sie eine orthogonale Matrix $\tilde{B}$ an, sodass $\tilde{B}^T A \tilde{B}$ eine Diagonalmatrix wird.

3. Gegeben seien die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Geben Sie alle Potenzen A^n und B^n, $n \in \mathbb{N}_0$, an.
Bitte wenden!

4. (a) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen jeweils in eine Taylorreihe um $x_0 = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{1+2\,x}\,, \quad g(x) = \frac{1}{1-3\,x}\,, \quad f(x)\,g(x) = \frac{1}{(1+2\,x)\,(1-3\,x)}\,.$$

(b) Entwickeln Sie die folgende Funktion (von zwei Variablen) in eine Taylorreihe um $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$f(x)\,g(y) = \frac{1}{(1+2\,x)\,(1-3\,y)}\,.$$

(c) Geben Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion $f(x)\,g(y)$ um $(x_0, y_0) = (0, 0)$ an.

5. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + x\,y\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion f.
(b) Prüfen Sie, ob die Funktion f Extemalstellen besitzt.
(c) Welche Punkte kommen als Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x + y^2 = 0$$

infrage?

6. Integrieren Sie die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + x\,y$$

über den Bereich

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1\,,\ x + 1 \le y \le 2\}\,.$$

Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.

Lösungen

1a) Wir beginnen mit dem Einheitsvektor:

$$\vec{\tilde{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,-1,0)\,.$$

Wir berechnen den Hilfsvektor:

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{a}}_2 &= (-1,0,1) - \left((-1,0,1)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,-1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,-1,0)\\ &= (-1,0,1) + \frac{1}{2}\,(1,-1,0) = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\,.\end{aligned}$$

Wir normieren den Hilfsvektor:

$$\vec{\tilde{e}}_1 = \frac{1}{||\vec{\tilde{a}}_2||}\,\vec{\tilde{a}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\,.$$

Die Vektoren $\vec{\tilde{e}}_1$ und $\vec{\tilde{e}}_2$ besitzen die Länge 1 und stehen senkrecht aufeinander.

1b) Der Übergang von der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ zur Basis $\vec{\tilde{b}}_1$, $\vec{\tilde{b}}_2$, $\vec{\tilde{b}}_2$, wird gegeben durch die Matrix:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\,.$$

Der Übergang von der Basis $\vec{\tilde{b}}_1$, $\vec{\tilde{b}}_2$, $\vec{\tilde{b}}_2$, zur Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ wird gegeben durch die Matrix:

$$B = \tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\,.$$

Die Matrix $\tilde{B}^{-1}$ bekommen wir durch Invertieren, oder wir entnehmen sie der Auflösung:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\,\vec{\tilde{b}}_1\,,\quad \vec{e}_2 = \frac{1}{2}\,\vec{\tilde{b}}_2\,,\quad \vec{e}_3 = -\frac{1}{2}\,\vec{\tilde{b}}_1 - \vec{\tilde{b}}_2 + \vec{\tilde{b}}_3\,.$$

2) Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda\,E) = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0\,.$$

Die Eigenwerte lauten:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Die Eigenvektoren ergeben sich aus:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Der Vektor $(1-\sqrt{2}, 1)$ bildet eine Basis des Eigenraums von λ_1. Der Vektor $(1+\sqrt{2}, 1)$ bildet eine Basis des Eigenraums von λ_2. Wir normieren die Eigenvektoren und bekommen folgende Matrix

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}\,, \quad \tilde{B}^T A \tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\,.$$

3) Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda\,E) = \lambda^2 - 1 = 0\,.$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt:

$$A^2 - E = O \quad \text{bzw.} \quad A^2 = E\,.$$

Damit ergibt sich:

$$A^{2\,k} = E\,, \quad A^{2\,k+1} = A\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\det(B - \lambda\,E) = \lambda^2 + 1 = 0\,.$$

und bekommen:

$$B^2 + E = O \quad \text{bzw.} \quad B^2 = -E\,.$$

Damit ergibt sich:

$$B^0 = E\,, \quad B^1 = B\,, \quad B^2 = -E\,, \quad B^3 = -B\,, \ldots\,.$$

Also:

$$B^{4\,k} = E\,, \quad B^{4\,k+1} = B\,, \quad B^{4\,k+2} = -E\,, \quad B^{4\,k+3} = -B\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,.$$

4a) Mit der geometrischen Reihe ergibt sich:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-2)^\nu\, x^\nu\,, |x| < \frac{1}{2}\,,$$

$$g(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} 3^\mu\, x^\mu\,, |x| < \frac{1}{3}\,.$$

Mit dem Cauchy-Produkt folgt:

$$f(x)\,g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} (-2)^\mu\, 3^{\nu-\mu} \right) x^\nu\,, |x| < \frac{1}{3}\,.$$

4b) Für die Funktion $f(x)\,g(y)$ bekommen wir:

$$f(x)\,g(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-2)^\nu\, 3^\mu\, x^\nu\, y^\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} (-2)^\mu\, 3^{\nu-\mu}\, x^\mu\, y^{\nu-\mu} \right)\,, \quad |x| < \frac{1}{2}\,, |y| < \frac{1}{3}\,.$$

4c) Das Taylorpolynom vom Grad 2 ergibt sich aus der Doppelsumme oder einfacher:

$$(1 - 2\,x + 4\,x^2 - 8\,x^3 + \cdots)\,(1 + 3\,y + 9\,y^2 + 27\,y^3 + \cdots)$$

zu:

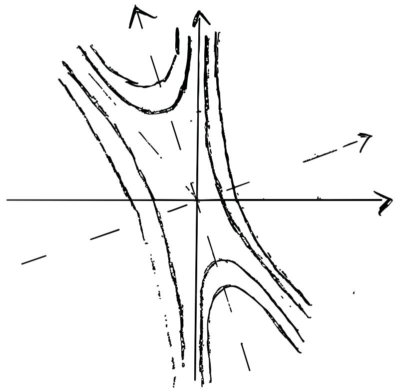
$$1 - 2\,x + 3\,y + 4\,x^2 + 9\,y^2 - 6\,x\,y\,.$$

5a) Es handelt sich um Hyperbeln. Die Achsenrichtungen werden durch die Eigenvektoren der quadratischen Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. (Aufgabe 2.)) Man kann auflösen und die Hyperbeln zeichnen:

$$y = \frac{c}{x} - x\,, \quad c \neq 0\,, \quad x = 0\,, y = -x\,, \quad c = 0\,.$$



Hyperbeln im gedrehten Koordinatensystem

5b) Der Gradient von f lautet: $(2\,x + y, x)$. Der Gradient ergibt den Nullvektor im Punkt $(0,0)$. Die Hessematrix im Nullpunkt ergibt sich zu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Determinante der Hessematrix

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

ist negativ. Wir haben also einen Sattelpunkt.

5c) Extremalstellen unter der Nebenbedingung müssen das folgende System lösen:

$$x + y^2 = 0\,, \quad 2\,x + y + \lambda = 0\,, \quad x + 2\,\lambda\,y = 0\,.$$

Wir bekommen mit der Nebenbedingung:

$$-2\,y^2 + y + \lambda = 0\,, \quad -y^2 + 2\,\lambda\,y = 0\,.$$

Ist $y = 0$, so ergibt sich $x = 0$, $\lambda = 0$.
Ist $y \neq 0$,

$$-y + 2\,\lambda = 0\,, \quad -2\,y^2 + y + \frac{1}{2}\,y = 0\,.$$

Also:

$$y = \frac{3}{4}\,, \quad x = -\frac{9}{16}\,, \quad \lambda = \frac{3}{8}\,.$$

Als Extremalstellen kommen infrage:

$$(0,0)\,, \quad \left(-\frac{9}{16}, \frac{3}{4}\right)\,.$$

Anderer Weg:

$$g(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -y^2\,.$$

Damit bekommen wir die Funktion unter der Nebenbedingung:

$$h(y) = f(-y^2, y) = y^4 - y^3\,.$$

Eine notwendige Bedingung für Extremalstellen ist:

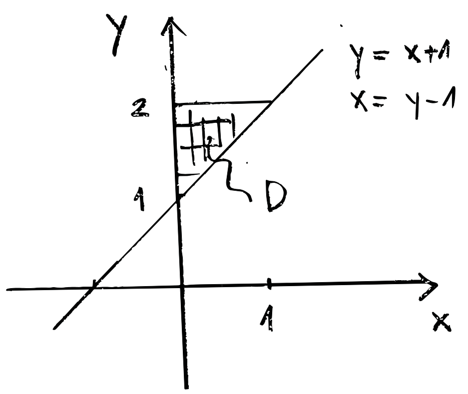
$$\frac{dh}{dy}(y) = 4\,y^3 - 3\,y^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0\,, y = \frac{3}{4}\,.$$

6) Es gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x+1}^2 (x^2 + x\,y)\,dy \right) dx \;&=\; \int\limits_0^1 \left(x^2\,y + x\,\frac{y^2}{2} \right)_{x+1}^2 dx \\ &=\; \int\limits_0^1 \frac{3}{2}\,\left(-x^3 + x\right)\,dx = \frac{3}{8}\,.\end{aligned}$$

Vertauschen der Integrationsreihenfolge:

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x+1}^2 (x^2 + x\,y)\,dy \right) dx = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^{y-1} (x^2 + x\,y)\,dx \right) dy\,.$$



Integrationsbereich D