KLAUSUR

Mathematik II (Informatiker)

12.3.2009

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Die Vektoren

$$\vec{a}_1 = (1, -1, 0)\,, \quad \vec{a}_2 = (-1, 0, 1)\,,$$

spannen einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ auf. Geben Sie eine Orthonormalbasis des Unterraums an.
(b) Wir betrachten die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)\,, \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0)\,, \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\,.$$

Wie lauten die Übergangsmatrizen von der kanoischen Basis zur Basis

$$\vec{\tilde{b}}_1 = 2\,\vec{e}_1\,, \quad \vec{\tilde{b}}_2 = 2\,\vec{e}_2\,, \quad \vec{\tilde{b}}_3 = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3\,,$$

und umgekehrt?

2. Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Geben Sie eine orthogonale Matrix $\tilde{B}$ an, sodass $\tilde{B}^T A \tilde{B}$ eine Diagonalmatrix wird.

3. Gegeben seien die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Geben Sie alle Potenzen A^n und B^n, $n \in \mathbb{N}_0$, an.

Lösungen

1a) Wir beginnen mit dem Einheitsvektor:

$$\vec{\tilde{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,-1,0)\,.$$

Wir berechnen den Hilfsvektor:

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{a}}_2 &= (-1,0,1) - ((-1,0,1)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,-1,0))\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,-1,0)\\ &= (-1,0,1) + \frac{1}{2}\,(1,-1,0) = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\,.\end{aligned}$$

Wir normieren den Hilfsvektor:

$$\vec{\tilde{e}}_1 = \frac{1}{||\vec{\tilde{a}}_2||}\,\vec{\tilde{a}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\,.$$

Die Vektoren $\vec{\tilde{e}}_1$ und $\vec{\tilde{e}}_2$ besitzen die Länge 1 und stehen senkrecht aufeinander.

1b) Der Übergang von der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ zur Basis $\vec{\tilde{b}}_1$, $\vec{\tilde{b}}_2$, $\vec{\tilde{b}}_2$, wird gegeben durch die Matrix:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\,.$$

Der Übergang von der Basis $\vec{\tilde{b}}_1$, $\vec{\tilde{b}}_2$, $\vec{\tilde{b}}_2$, zur Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ wird gegeben durch die Matrix:

$$B = \tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\,.$$

Die Matrix $\tilde{B}^{-1}$ bekommen wir durch Invertieren, oder wir entnehmen sie der Auflösung:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\,\vec{\tilde{b}}_1\,,\quad \vec{e}_2 = \frac{1}{2}\,\vec{\tilde{b}}_2\,,\quad \vec{e}_3 = -\frac{1}{2}\,\vec{\tilde{b}}_1 - \vec{\tilde{b}}_2 + \vec{\tilde{b}}_3\,.$$

2) Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda\,E) = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0\,.$$

Die Eigenwerte lauten:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Die Eigenvektoren ergeben sich aus:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Der Vektor $(1-\sqrt{2}, 1)$ bildet eine Basis des Eigenraums von λ_1. Der Vektor $(1+\sqrt{2}, 1)$ bildet eine Basis des Eigenraums von λ_2. Wir normieren die Eigenvektoren und bekommen folgende Matrix

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}\,, \quad \tilde{B}^T A \tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\,.$$

3) Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda\, E) = \lambda^2 - 1 = 0\,.$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt:

$$A^2 - E = O \quad \text{bzw.} \quad A^2 = E\,.$$

Damit ergibt sich:

$$A^{2\,k} = E\,, \quad A^{2\,k+1} = A\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\det(B - \lambda\, E) = \lambda^2 + 1 = 0\,.$$

und bekommen:

$$B^2 + E = O \quad \text{bzw.} \quad B^2 = -E\,.$$

Damit ergibt sich:

$$B^0 = E\,, \quad B^1 = B\,, \quad B^2 = -E\,, \quad B^3 = -B\,, \ldots\,.$$

Also:

$$B^{4\,k} = E\,, \quad B^{4\,k+1} = B\,, \quad B^{4\,k+2} = -E\,, \quad B^{4\,k+3} = -B\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,.$$