KLAUSUR

Mathematik II (Informatiker)

11.9.2009

(W. Seiler / W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Versuch–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 14 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Gegeben sei der folgende Unterraum $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie eine Basis von U an.

   (b) Wir betrachten folgende Basen des $\mathbb{C}^2$: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Wie lauten die Übergangsmatrizen der Basen?

   (c) Die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$, erzeugen einen Unterraum V des $\mathbb{C}^3$. Geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.

2. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird gegeben durch:
   $f(\vec{e}_1) = 3\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_2$, $f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Wie lautet die Matrix der Abbildung f bezüglich der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$?
   (b) Welches Bild ergibt sich für das Rechteck
   $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} = \alpha_1\,\vec{e}_1 + \alpha_2\,\vec{e}_2,\ 0 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 1\}$ unter der Abbildung f?
   (c) Wie lautet die Matrix der Abbildung f bezüglich der Basis
   $\vec{b}_1 = -\vec{e}_2$, $\vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$?

3. Gegeben sei die Matrix:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Welche Lösungen besitzt das homogene System $A\,\vec{x} = \vec{0}$?
   Welche Dimension besitzt der Bildraum der Abbildung $\vec{x} \to A\,\vec{x}$?
   (b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:
   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & -n+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (c) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Lösungen

1a) Wir lösen die Gleichung $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ wie folgt: $x_3 = \lambda_3, x_2 = \lambda_2\,, x_1 = -\lambda_2 + \lambda_3$, mit $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Der Unterraum U besteht aus den Vektoren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Eine Basis von U ist:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

1b) Es gilt: $\vec{\tilde{b}}_1 = -i\,\vec{e}_1\,, \vec{\tilde{b}}_2 = \vec{e}_1 + i\,\vec{e}_2$, und $\vec{e}_1 = i\,\vec{\tilde{b}}_1$, sowie $i\,\vec{e}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{\tilde{b}}_2 = -i\,\vec{\tilde{b}}_1 + \vec{\tilde{b}}_2$ bzw. $\vec{e}_2 = -\vec{\tilde{b}}_1 - i\,\vec{\tilde{b}}_2$. Die Übergangsmatrizen lauten:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & -i \end{pmatrix} .$$

1c) Es gilt:

$$||\vec{a}_1|| = \sqrt{2}$$

und

$$\vec{\tilde{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{a}_1 .$$

Wir berechnen den Hilfsvektor:

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{a}}_2 &= \vec{a}_2 - (\vec{a}_2\,\vec{\tilde{e}}_1)\,\vec{\tilde{e}}_1 \\ &= \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \\ i \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Mit

$$||\vec{\tilde{a}}_2|| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

ergibt sich:

$$\vec{\tilde{e}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \\ i \end{pmatrix} .$$

2a) Die Matrix der Abbildung f bezüglich der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ lautet:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

2b) Mit der Matrix bilden wir das Rechteck ab:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,\alpha_1 - \alpha_2 \\ 4\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Das Bild des Rechtecks stellt das von den Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm dar.

2c) Aus der Darstellung: $\vec{b}_1 = -\vec{e}_2,\ \vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$ ergibt sich die Übergangsmatrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Aus der Darstellung: $\vec{e}_1 = 2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2,\ \vec{e}_2 = -\vec{b}_1$ ergibt sich die Übergangsmatrix

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix der Abbildung f bezüglich der Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ lautet:

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Anderer Weg:

$$f(\vec{b}_1) = -f(\vec{e}_2) = 2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\,\vec{b}_1 = 4\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 ,$$

$$f(\vec{b}_2) = f(\vec{e}_1) + 2\,f(\vec{e}_2) = 3\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_2 + 2\,(-\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 8\,\vec{e}_2 = -6\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2 .$$

3a) Der Nullraum

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

wird erzeugt von dem Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Nullraum hat die Dimension 1. Nach der Dimensionsformel hat der Bildraum die Dimension 3-1=2. (Der Rang der Matrix ist 2).

3b) Wir verwenden vollständige Induktion. Für $n = 1$ gilt:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass für ein $n > 1$ gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & -n+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Induktionsschritt ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n\,A = \begin{pmatrix} 1 & -n & -n+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -n-1 & -n \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(n+1) & -(n+1)+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3c) Das charakteristische Polynom lautet:

$$\det(A - \lambda\,E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)^2\,\lambda\,.$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$. Die Eigenvektoren ergeben sich aus:

$$\lambda_1 : \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{u} = \vec{0}$$

bzw. aus

$$\lambda_2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{u} = \vec{0}\,.$$

Also: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt den Eigenraum zu λ_1 und $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt den Eigenraum zu λ_2.