KLAUSUR

Mathematik III (E)

8.3.2000

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 11 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. Man bestimme die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' = \sin(x+y)\,, \quad y(0) = 0\,.$$

Hinweis: Man setze $u = x + y$ und benutze die Stammfunktion:

$$\int \frac{1}{\sin(u)+1}\,du = -\frac{2}{\tan\left(\frac{u}{2}\right)+1}\,.$$

Welche Asymptoten besitzt die Lösung?
(5P)

2. Gegeben sei ein Anfangswertproblem für folgende Differenzialgleichung:

$$y'(x) = x^2 + y^2\,, \quad y(x_0) = y_0\,.$$

Man bestimme die ersten drei Glieder der Potenzreihenentwicklung der Lösung. Im Fall $y(0) = 0$ bestimme man die ersten acht Glieder.
(4P)

3. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

(4P)

4. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y''' + 3\,y'' + 7\,y' = 0\,.$$

Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(\pi) = \frac{\sqrt{17}}{3}\,, y'(\pi) = 0\,, y''(\pi) = 0\,?$$

(5P)

5. Gegeben sei das System: $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Man bestimme ein Fundamentalsystem, indem man Eigenwerte und Eigenvektoren von A berechnet.
(4P)

Lösungen

1.) Wir führen neue Funktionen ein: $u(x) = x + y(x)$. Damit bekommen wir zunächst $y'(x) = u'(x) - 1$, sodass die Funktionen u die Differenzialgleichung erfüllen müssen:

$$u' = \sin(u) + 1\,.$$

Diese Gleichung kann sofort durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden:

$$\int \frac{1}{\sin(u)+1}\,du = x + c\,.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ergibt die Anfangsbedingung:

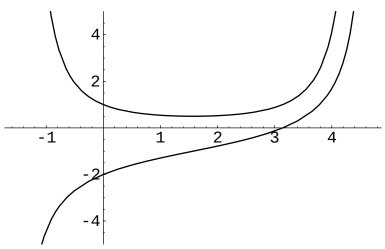
$$u(0) = 0\,.$$

Die Differenzialgleichung für u besitzt konstante Lösungen, wenn $\sin(u) - 1 = 0$ gilt. Die Lösung des Anfangswertproblems $u(0) = 0$ kann den von den konstanten Lösungen

$$u(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad u(x) = \frac{3\,\pi}{2}$$

begrenzten Streifen nicht verlassen. In diesem Streifen haben wir die Stammfunktion:

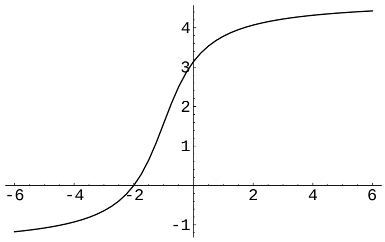
$$\int \frac{1}{\sin(u)+1}\,du = -\frac{2}{\tan\left(\frac{u}{2}\right)+1} = g(u)\,.$$



Die Funktion
$$\frac{1}{\sin(u)+1}$$
und die Stammfunktion
$$g(u) = -\frac{2}{\tan\left(\frac{u}{2}\right)+1}$$
für $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\,\pi}{2}$

Die Umkehrfunktion der Stammfunktion wird gegeben durch:

$$g^{-1}(u) = \begin{cases} 2\,\arctan\left(\frac{-2-u}{u}\right) & , \quad \text{für} \quad u < 0 \\ 2\,\pi + 2\,\arctan\left(\frac{-2-u}{u}\right) & , \quad \text{für} \quad u > 0 \end{cases}$$



Die Umkehrfunktion $g^{-1}(u)$ der Stammfunktion $g(u) = -\dfrac{2}{\tan\left(\frac{u}{2}\right) + 1}$

Nun erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems für u aus der Gleichung:

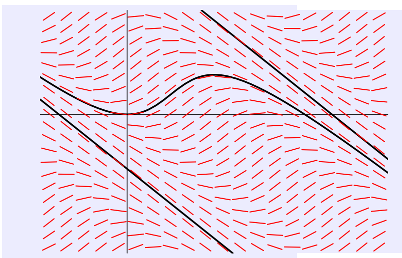
$$g(u) = x + c\,.$$

Wegen $\tan(0) = 0$ folgt $c = -2$ und somit:

$$u(x) = g^{-1}(x - 2)\,.$$

Schließlich ergibt sich die Lösung der gegebenen Anfangswertproblems zu:

$$y(x) = \begin{cases} -x + 2\,\arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) & ,\quad \text{für} \quad x < 2 \\ -x + 2\,\pi + 2\,\arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) & ,\quad \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$



Lösung des Anfangswertproblems $y' = \sin(x + y)$,$y(0) = 0$ im Richtungsfeld mit den Lösungen $y(x) = -x - \dfrac{\pi}{2}$, $y(x) = -x + \dfrac{3\,\pi}{2}$

2.) Die Lösung des Anfangswertproblems kann lokal in eine Potenzreihe entwickelt werden:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\,(x - x_0)^j\,, \qquad c_0 = y_0\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$y'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\,c_{j+1}\,(x - x_0)^j\,,$$

$$(y(x))^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{j} c_k\,c_{j-k} \right) (x - x_0)^j\,.$$

Für den Term x^2 erhält man die Entwicklung:

$$x^2 = (x - x_0)^2 + 2\,(x - x_0) + x_0^2\,.$$

Setzt man nun in die Differenzialgleichung ein, so bekommt man folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned}
x^0 &: \ c_1 = c_0^2 + x_0^2\,,\\
x^1 &: 2\,c_2 = 2\,c_0\,c_1 + 2\,x_0\,,\\
x^2 &: 3\,c_3 = 2\,c_0\,c_2 + c_1^2 + 1\,,\\
x^3 &: 4\,c_4 = 2\,c_0\,c_3 + 2\,c_1\,c_2\,,\\
x^4 &: 5\,c_5 = 2\,c_0\,c_4 + 2\,c_1\,c_3 + c_2^2\,,\\
x^5 &: 6\,c_6 = 2\,c_0\,c_5 + 2\,c_1\,c_4 + 2\,c_2\,c_3\,,\\
x^6 &: 7\,c_7 = 2\,c_0\,c_6 + 2\,c_1\,c_5 + 2\,c_2\,c_4 + c_3^2\,,\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Koef£zienten c_j sukzessive:

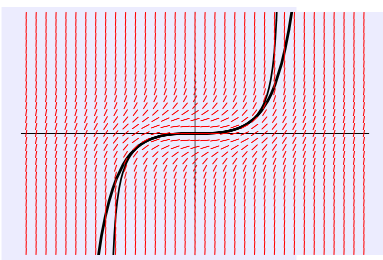
$$\begin{aligned}
c_0 &= y_0\,,\\
c_1 &= x_0^2 + y_0^2\,,\\
c_2 &= x_0 + y_0\,x_0^2 + y_0^3\,,\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Die Potenzreihenentwicklung der Lösung des Anfangswertproblems $y(x_0) = x_0$ lautet:

$$y(x) = y_0 + (x_0^2 + y_0^2)\,(x - x_0) + (x_0 + y_0\,x_0^2 + y_0^3)\,(x - x_0)^2 + \cdots\,.$$

Für das Anfangswertproblem $y(0) = 0$ bekommt man folgende Entwicklung:

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \cdots\,.$$



Die (von Maple gefundene exakte) Lösung des Anfangswertproblems
$y' = x^2 + y^2\,, y(0) = 0$
im Richtungsfeld.
Die Potenzreihenentwicklung der Lösung wird nach den ersten acht Gliedern abgebrochen und stärker gezeichnet.

3.) Ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$y'' + y = 0$$

lautet:

$$y_1(x) = \cos(x)\,, \quad y_2(x) = \sin(x)\,.$$

Damit haben wir auch die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung bekommt man durch Variation der Konstanten. Eine partikuläre Lösung

$$y_p(x) = c_{p,1}(x)\, y_1(x) + c_{p,2}(x)\, y_2(x)$$

ergibt sich mit Funktionen $c_{p,1}(x)\,, c_{p,2}(x)$ aus

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{p,1}'(x) \\ c_{p,2}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix}\,.$$

Löst man das System mit der Cramerschen Regel und berücksichtigt:

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} = 1\,,$$

so folgt:

$$c_{p,1}'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)\,, \quad c_{p,2}'(x) = 1\,.$$

Mit

$$\int (-\tan(x))\,dx = \ln(\cos(x))\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1\, \cos(x) + c_2\, \sin(x) + \ln(\cos(x))\, \cos(x) + x\, \sin(x)\,.$$

4.) Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^3 + 3\,\lambda^2 + 7\,\lambda = 0\,.$$

Offenbar ist $\lambda_1 = 0$ eine Nullstelle und zwei weitere Nullstellen ergeben sich aus der Gleichung:

$$\lambda^2 + 3\,\lambda + 7 = 0\,,$$

d.h.

$$\lambda_{2/3} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}\, i\,.$$

Damit bekommen wir die allgemeine Lösung:

$$y(x) = \; c_1 + e^{-\frac{3}{2}\,x} \, \left(c_2 \, \sin\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\,x\right) + c_3 \, \cos\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\,x\right)\right) \; .$$

Nun könnte man die Konstanten durch Nachrechnen so bestimmen, dass die gegebenen Anfangsbedingungen erfüllt werden. Da aber jede Konstante Funktion eine Lösung der Differenzialgleichung darstellt ($\lambda_1 = 0$), nehmen wir die Lösung

$$y(x) = \frac{\sqrt{17}}{3}\,.$$

Offenbar werden die geforderten Anfangsbedingungen erfüllt.
5.) Es gilt

$$\det(A - \lambda\, E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 + 3 = 0\,.$$

Damit ergeben sich folgende Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}\, i\,, \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}\, i\,.$$

Wir suchen einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_1:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ -3 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\, i & 1 \\ -3 & -\sqrt{3}\, i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; .$$

Dieses homogene System besitzt einen Lösungsraum der Dimension eins. Eine Basislösung ergibt sich aus der Gleichung:

$$-\sqrt{3}\, i\, u_1 + u_2 = 0\,.$$

(Die zweite Gleichung des Systems ist von der ersten linear abhängig und wird somit mit erfüllt). Setzen wir $u_1 = 1$, so ergibt sich $u_2 = \sqrt{3}\, i$. Eine komplexwertige Lösung des Differenzialgleichungssystems lautet damit:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}\, i \end{pmatrix} \; e^{(2+\sqrt{3}\, i)\, x}\,.$$

Um ein Fundamentalsystem aus zwei reellwertigen Lösungen zu bekommen, bestimmen wir Real- und Imaginärteil von $Y(x)$:

$$Y_1(x) = \Re(Y(x)) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}\,x)\,e^{2\,x} \\ -\sqrt{3}\,\sin(\sqrt{3}\,x)\,e^{2\,x} \end{pmatrix} ,$$

$$Y_2(x) = \Im(Y(x)) = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}\,x)\,e^{2\,x} \\ \sqrt{3}\,\cos(\sqrt{3}\,x)\,e^{2\,x} \end{pmatrix} ,$$