KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker

24.2.2004

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y' = \frac{1-y}{x}\,, \quad y(-1) = \frac{1}{2}\,.$$

Man gebe den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.
(6P)

2. Man gebe eine lineare, homogene Differenzialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, welche folgende Lösungen besitzt:

$$y_1(x) = 2\,, \quad y_2(x) = \cos(x)\,, \quad y_3(x) = 5\,\sin(x)\,.$$

Wie lautet die Lösung, wenn man für diese Differenzialgleichung das Anfangswertproblem stellt: $y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = 1\,$?
(8P)

3. Gegeben sei das System: $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme ein Fundamentalsystem, indem man die Matrixexponentialfunktion von A berechnet.
(6P)

4. Man berechne die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto z^3$$

(a) direkt durch Grenzwertbildung und (b) mit den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen.
(6P)

5. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto e^z$$

und die Kurve Γ durch $z(t) = (2-i)\,t,\ t \in [-1, 0]$. Man skizziere die Kurve und berechne das Kurvenintegral $\int_\Gamma f(z)\,dz$.
(4P)

Lösungen

1.) Trennung der Veränderlichen $y \leq 1$ ergibt:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{y} \frac{1}{1-s}\, ds = \int\limits_{-1}^{x} \frac{1}{t}\, dx \, .$$

Integration liefert:

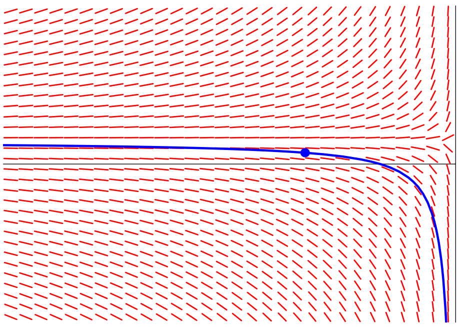
$$-\ln(1-s)|_{\frac{1}{2}}^{y} = \ln(-t)|_{-1}^{x} \, ,$$

bzw.

$$-\ln(1-y) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(-x) - \ln(1) \Longleftrightarrow \frac{1}{2\,(1-y)} = -x \, .$$

Auflösen ergibt schließlich:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2\,x} \, .$$



Die Lösung des Anfangswertproblems im Richtungsfeld

Man kann die Differenzialgleichung auch schreiben:

$$y' = -\frac{1}{x}\, y + \frac{1}{x} \, .$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_h(x) = \frac{c}{x} \, , \quad x < 0 \, .$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man durch Variation der Konstanten, oder man sieht, dass $y_p(x) = 1$ eine Lösung ist. Also ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y(x) = \frac{c}{x} + 1 \, , \quad x < 0 \, .$$

Mit der Anfangsbedingung ergibt sich $c = -\frac{1}{2}$.
2.) Offensichtlich stellen die Funktionen $u_1(x) = 1, u_2(x) = \cos(x), u_3(x) = \sin(x)$ ein Fundamentalsystem der Differenzialgleichung dar. Wir suchen nun eine lineare Differenzialgleichung dritter Ordnung, deren charakteristisches Polynom $P(\lambda)$ die Nullstellen $0, i, -i$ besitzt. Zunächst ist

$$P(\lambda) = \lambda\,(\lambda^2 + 1) = \lambda^3 + \lambda$$

und

$$y''' + y' = 0\,.$$

Zur Lösung des AWP's

$$y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = 1\,?$$

bilden wir die Wronskische Matrix:

$$W(x) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 0 & -\sin(x) & \cos(x) \\ 0 & -\cos(x) & -\sin(x) \end{pmatrix}, W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt $(c_1, c_2, c_3) = (2, -1, 0)$ und folgende Lösung des AWP's:
$y(x) = 2 - \cos(x)$.
Man kann die Differenzialgleichung auch anders finden. Man setzt die Lösungen $u_1(x) = 1, u_2(x) = \cos(x), u_3(x) = \sin(x)$ in die Differenzialgleichung

$$y''' + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

ein und bestimmt die Koffizienten. Dies führt auf das System:

$$W(x)^T \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_1'''(x) \\ u_2'''(x) \\ u_3'''(x) \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gibt noch einen Weg. Jede beliebige Lösung der gesuchten Differenzialgleichung erfllt:

$$a_0\, y + a_1\, y' + a_2\, y'' + y''' = 0\,.$$

Zusammen mit

$$\begin{aligned} a_0\, u_1 + a_1\, u_1' + a_2\, u_1'' + u_1''' &= 0\,, \\ a_0\, u_2 + a_1\, u_2' + a_2\, u_2'' + u_2''' &= 0\,, \\ a_0\, u_3 + a_1\, u_3' + a_2\, u_3'' + u_3''' &= 0\,, \end{aligned}$$

erhalten wir ein 4×-System mit einer nichttrivialen Lösung $(a_0, a_1, a_2, 1)$. Also muss die Determinante des Systems ungleich Null sein:

$$\det \begin{pmatrix} y & y'(x) & y'' & y''' \\ u_1 & u_1'(x) & u_1'' & u_1''' \\ u_2 & u_2'(x) & u_2'' & u_2''' \\ u_3 & u_3'(x) & u_3'' & u_3''' \end{pmatrix} = -y''' - y' = 0\,.$$

3.) Mit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt: $e^{a\,x} = e^{-3\,x\,E + 2\,x\,B} = e^{-3\,x\,E}\, e^{2\,x\,B}$

und wegen $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{a\,x} = e^{-3\,x}\, E\,(E + 2\,x\,B) = e^{-3\,x}\, E + 2\,x\,e^{-3\,x}\, B = \begin{pmatrix} e^{-3\,x} & 2\,x\,e^{-3\,x} \\ 0 & e^{-3\,x} \end{pmatrix}\,.$$

Damit ergibt sich das Fundamentalsystem:

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} e^{-3\,x} \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} 2\,x\,e^{-3\,x} \\ e^{-3\,x} \end{pmatrix}\,.$$

4. a) Mit dem binomischen Satz erhält man:

$$z^3 = ((z - z_0) + z_0)^3 = (z - z_0)^3 + 3\,(z - z_0)^2\, z_0 + 3\,(z - z_0)\, z_0^2 + z_0^3$$

also:

$$\frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = (z - z_0)^2 + 3\,(z - z_0)\, z_0 + 3\, z_0^2$$

und

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = 3\, z_0^2 = f'(z_0)\,.$$

4. b) Mit

$$z^3 = (x + y\,i)^3 = (x^3 - 3\,x\,y^2) + (3\,x^2\,y - y^3)\,i = u(x, y) + v(x, y)\,i$$

folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3\,x^2 - 3\,y^2\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 6\,x\,y\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -6\,x\,y\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 3\,x^2 - 3\,y^2\,.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen sind erfüllt, und es gilt:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\,i = 3\,((x^2 - y^2) + 2\,x\,y\,i) = 3\,z^2\,.$$

5) Die Funktion $f(z) = e^z$ ist holomorph und besitzt die Stammfunktion e^z. Also gilt für das Wegintegral:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = e^{(2-i)\,0} - e^{(2-i)\,(-1)} = 1 - e^{-2}\,e^{i}\,.$$

Oder direkt:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{-1}^{0} e^{(2-i)\,t}\,(2-i)\,dt = 1 - e^{-2}\,e^{i}\,.$$

Der Weg Γ stellt eine Strecke dar, welche die Punkte $-2 + i$ und 0 verbindet.