KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker

7.9.2004

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y' = \frac{y^2}{1-x}\,, \quad y(2) = \frac{1}{2}\,.$$

   Man gebe den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.
   (6P)

2. Man gebe ein Fundamentalsystem folgender Gleichung:

$$y^{(6)} + y = 0\,.$$

   Alle Rechenschritte sind darzustellen.
   (6P)

3. Man bestimme eine Lösung des (Matrix)-Systems: $M' = AM$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

   indem man die Matrixexponentialfunktion von A berechnet. Hinweis: $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\,\lambda$ und Cayley-Hamilton verwenden.
   (8P)

4. Sei $a \neq 0$ eine komplexe Zahl. Man entwickle folgende Funktion in eine Laurentreihe um $z_0 \neq a$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^2}\,.$$

   In welchem Teilgebiet von $\mathbb{C}$ konvergiert die Laurentreihe?
   (6P)

5. Sei $\omega \in \mathbb{R}$, $R > 0$ (fest) und

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}\,.$$

   Die Kurve Γ werde gegeben durch $z(t) = -t + i\,\omega$, $t \in [-R, R]$. Man skizziere die Kurve und vereinfache das Kurvenintegral $\int_\Gamma f(z)\,dz$.
   (4P)

Lösungen

1.)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{y} s^{-2}\, ds = \int_{2}^{x} \frac{1}{1-t}\, dt\,, \quad -\frac{1}{y} + 2 = -\ln(x-1)$$

$$y(x) = \frac{1}{2+\ln(x-1)}\,, \quad 1 + e^{-2} < x\,.$$

2.)

$$\lambda^6 = -1 = e^{\pi\, i}\,, \quad \lambda_k = e^{-\frac{\pi}{6}\, i + \frac{2\pi}{6}\, k\, i}\,, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\,.$$

$$\lambda_k = \pm i\,, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\,, \pm - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\,.$$

$$y_1(x) = \sin(x)\,, y_2(x) = \cos(x)\,, y_3(x) = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin(\frac{1}{2}x)\,, y_4(x) = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos(\frac{1}{2}x)\,,$$

$$y_5(x) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin(\frac{1}{2}x)\,, y_6(x) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos(\frac{1}{2}x)\,.$$

3.) $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda$. Benutze Cayley-Hamilton (andere Wege sind möglich).

$$A^3 = 5\,A\,, \quad A^{2\nu+1} = 5^k\,A\,, \nu \geq 1\,, A^{2\nu} = 5^{\nu-1}\,A^2\,, \nu \geq 2\,,$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

$$e^{Ax} = E + Ax + A^2\frac{x^2}{2!} + A^3\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{Ax} = E + (x + 5\frac{x^3}{3!} + 5^2\frac{x^5}{5!} + 5^3\frac{x^7}{7!} + \cdots)A + (\frac{x^2}{2!} + 5\frac{x^4}{4!} + 5^2\frac{x^6}{6!} + \cdots)A^2\,.$$

4.)

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{a-z_0}{z-z_0}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a-z_0)^\nu}{(z-z_0)^{\nu+1}}\,, \quad |z-z_0| > |a-z_0|\,.$$

$$\frac{1}{(z-a)^2} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z-a}$$

$$\frac{1}{(z-a)^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \, \frac{(z-z_0)^{\nu-1}}{(a-z_0)^{\nu+1}} \,, \quad |z-z_0| > |a-z_0| \,.$$

5.) Strecke parallel zur reellen Achse, die die Punkte $R + i\,\omega$ und $-R + i\,\omega$ verbindet.

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\,dz &= -\int_{-R}^{R} e^{-\frac{(-t+i\,\omega)^2}{2}}\,dt = -\int_{-R}^{R} e^{-\frac{t^2}{2}}\,e^{\omega\,t\,i}\,e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,dt \\
&= -e^{-\frac{\omega^2}{2}} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{t^2}{2}}\,e^{\omega\,t\,i}\,dt \,.
\end{aligned}$$