KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker

25.9.2006

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos(x)}{y}, \quad y(0) = 1,$$

und geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.
(6P)

2. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der folgenden Diffenrenzialgleichung mit der Ansatzmethode:

$$y'' + y' = \cos(2\,x).$$

(6P)

3. Gegeben sei das System:

$$y_1' = 3\,y_1, \quad y_2' = y_1 - y_2.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
(6P)

4. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z+i}$$

um $z_0 = 0$ in eine Laurent-Reihe im Gebiet $1 < |z| < 3$.
(6P)

5. Berechnen Sie das Residuum der Funktion

$$f(z) = \frac{e^{z\,i}}{1+z^2}$$

in $z_0 = -i$.
(6P)

Lösungen

1.) Wir separieren und integrieren:

$$\int_1^y s\,ds = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos(t)\,dt\,,$$

bzw.

$$\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin(x)\,.$$

Auflösen ergibt:

$$y(x) = \sqrt{\sqrt{2}\,\sin(x) + 1}\,.$$

Der maximale Definitionsbereich lautet:

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\,\pi}{4}\,.$$

2.) Wir machen den Ansatz:

$$y_p(x) = A\,\cos(2\,x) + B\,\sin(2\,x)\,.$$

Einsetzen ergibt:

$$-4\,A\,\cos(2\,x) - 4\,B\,\sin(2\,x) - 2\,A\,\sin(2\,x) + 2\,B\,\cos(2\,x) = \cos(2\,x)$$

bzw.

$$-4\,A + 2\,B = 1\,, \quad -2\,A - 4\,B = 0\,.$$

Die Lösung lautet:

$$A = -\frac{1}{5}\,, \quad B = \frac{1}{10}\,.$$

Wir bekommen damit:

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}\,\cos(2\,x) + \frac{1}{10}\,\sin(2\,x)\,.$$

Alternative: Wir gehen zur Differenzialgleichung über:

$$y'' + y' = e^{2\,x\,i}$$

und machen den Ansatz:

$$y_p(x) = c\, e^{2\,x\,i}\,.$$

Einsetzen liefert:

$$c\,((2\,i)^2 + 2\,i) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad c = \frac{1}{-4+2\,i} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\,i\,.$$

Wir benötigen den Realteil von

$$\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\,i\right)\; e^{2\,x\,i}$$

und bekommen

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}\,\cos(2\,x) + \frac{1}{10}\,\sin(2\,x)\,.$$

3.) Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung lautet:

$$y_1(x) = c_1\, e^{3\,x}\,.$$

Damit bleibt noch die zweite Gleichung in der Form:

$$y_2' + y_2 = c_1\, e^{3\,x}\,.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$y_{2h}(x) = c_2\, e^{-x}\,.$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung berechnen wir mit dem Ansatz:

$$y_{2p}(x) = c\, e^{3\,x}$$

und bekommen

$$c = \frac{c_1}{4}\,.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^{3\,x} \\ c_2\, e^{-x} + \frac{c_1}{4}\, e^{3\,x} \end{pmatrix}\,.$$

Alternative: Wir schreiben das System in Matrixform:

$$Y' = A\,Y\,, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Die Matrix A besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = (3-\lambda)\,(-1-\lambda)$$

und die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 3\,, \quad \lambda_2 = -1\,.$$

Aus

$$(A - 3\,E)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich der Basiseigenvektor:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Aus

$$(A - (-1)\,E)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich der Basiseigenvektor:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die Fundamentallösungen

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} e^{3\,x}\,, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}\,,$$

und damit die allgemeine Lösung

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} e^{3\,x} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}\,.$$

4.) Für $|z| < 3$ gilt:

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{\nu=0}^{\infty} 3^{-\nu}\,z^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} 3^{-\nu-1}\,z^{\nu}\,.$$

Für $1 < |z|$ gilt:

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-i)^{\nu}\,z^{-\nu-1} = \sum_{\nu=-\infty}^{-1}(-i)^{-\nu-1}\,z^{\nu}\,.$$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 3^{-\nu-1}\, z^{\nu} + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} (-i)^{-\nu-1}\, z^{\nu}\, .$$

5.) In $z_0 = -i$ besitzt die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{z\,i}}{1+z^2} = \frac{e^{z\,i}}{(z-i)\,(z+i)}$$

einen einfachen Pol. Das Residuum ergibt sich aus:

$$\lim_{z \to -i} (z+i)\, f(z) = \frac{e^1}{-2\,i} = \frac{e}{2}\, i\, .$$