KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker/Mechatroniker

23.3.2007

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{x^2+1}\,y^2\,,$$

welche die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist diese Lösung erklärt?

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y''' + 2\,y' = x\,.$$

3. Gegeben sei das System: $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem, indem Sie die Matrixexponentialfunktion $e^{A\,x}$ berechnen.

4. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = (z+1)^2$.
(a) Geben Sie den Realteil und den Imaginärteil der Funktion an und zeigen Sie, dass die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllt sind.
(b) Bilden Sie Parallelen zur reellen Achse in der z-Ebene unter der Abbildung $f(z) = w$ ab. Welche Kurven ergeben sich in der w-Ebene?

5. Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_\Gamma f(z)\,dz$, $f(z) = z^2$, wobei Γ den Halbkreis darstellt $z(t) = R\,e^{t\,i}$, $t \in [\pi, 2\,\pi]$, (a) auf direktem Weg und (b) mithilfe einer Stammfunktion von $f(z) = z^2$.

Lösungen

1.) Trennung der Veränderlichen ergibt:

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\int \frac{x}{x^2+1}\,dx\,.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Beziehung

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}\,\ln(x^2+1) + c \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{1}{\frac{1}{2}\,\ln(x^2+1) - c}\,.$$

(Hinzu kommt noch die konstante Lösung $y(x) = 0$).
Die Anfangsbedingung $y(0) = 1 = \frac{1}{-c}$ wird erfüllt von der Lösung

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}\,\ln(x^2+1) + 1}\,.$$

Es gilt $x^2 + 1 \geq 1$ und damit $\ln(x^2+1) \geq \ln(1) = 0$. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{2}\,\ln(x^2+1) + 1 \geq 1\,.$$

Die Lösung existiert somit für alle $x \in \mathbb{R}$.
2.) Das charakteristische Polynom (der homogenen Gleichung) lautet:

$$\lambda^3 + 2\,\lambda$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}\,i$. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h(x) = c_1 + c_2\,\cos(\sqrt{2}\,x) + c_3\,\sin(\sqrt{2}\,x)\,.$$

Nach der Ansatzmethode gibt es eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung der Gestalt:

$$y_p(x) = x\,(a\,x + b)\,.$$

Man sieht sofort durch Einsetzen:

$$y_p(x) = \frac{1}{4}\,x^2\,.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2\,\cos(\sqrt{2}\,x) + c_3\,\sin(\sqrt{2}\,x) + \frac{1}{4}\,x^2\,.$$

3) Wir berechnen die Matrixexponentialfunktion, indem wir A zunächst als Summe zweier Matrizen schreiben:

$$A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

sodass sich ergibt:

$$e^{A\,x} = e^{2\,E\,x}\,e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x}\,.$$

Mit

$$e^{2\,E\,x} = \sum_{n=0}^{\infty}(2\,E)^n\,\frac{x^n}{n!} = E\,\sum_{n=0}^{\infty}2^n\,\frac{x^n}{n!} = E\,e^{2\,x}\,,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x} = E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,x\,,$$

bekommt man dann:

$$e^{A\,x} = E\,\left(E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,x\right)\,e^{2\,x} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,e^{2\,x}\,.$$

Aus der Matrixexponentialfunktion entnimmt man das Fundamentalsystem:

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,e^{2\,x}\,, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\,e^{2\,x}\,.$$

4) Wir entnehmen den Realteil und den Imaginärteil

$$u(x,y) = (x+1)^2 - y^2\,, \quad v(x,y) = 2\,(x+1)\,y\,,$$

aus

$$f(x+y\,i) = ((x+1)^2 + y\,i)^2 = (x+1)^2 - y^2 + 2\,(x+1)\,y\,i\,.$$

Es gilt ferner:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2\,(x+1)\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2\,(x+1)\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2\,y\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2\,y\,,$$

und die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen sind erfüllt.
(b) Die Bilder von Parallelen zur reellen Achse $z = x + y_0\, i$ ergeben sich aus:

$$u = (x+1)^2 - y_0^2\,, \quad v = 2\,(x+1)\,y_0\,.$$

Ist $y_0 = 0$, dann bekommen wir die Kurve: $u = (x+1)^2\,, \quad v = 0$. Also die positive reelle Achse in der w-Ebene.
Ist $y_0 \neq 0$, dann bekommen wir die Kurve:

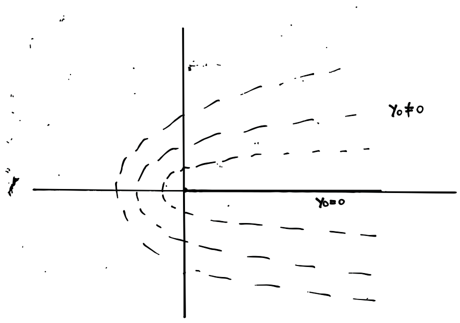
$$u = (x+1)^2 - y_0^2\,, \quad v = 2\,(x+1)\,y_0\,.$$

Mit

$$\frac{v}{2\,y_0} = (x+1)$$

bekommen wir die Parabel:

$$u = \frac{v^2}{4\,y_0^2} - y_0^2\,.$$



Bildkurven von $y = y_0$ unter $f(z) = (z+1)^2$

5) (a) Es gilt definitionsgemäß:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma z^2\,dz &= \int_\pi^{2\pi} R^2\,e^{2\,t\,i}\,R\,e^{t\,i}\,i\,dt = \int_\pi^{2\pi} R^3\,e^{3\,t\,i}\,i\,dt \\ &= R^3\;\frac{1}{3}\,e^{3\,t\,i}\Big|_\pi^{2\pi} = \frac{R^3}{3}\,\left(e^{3\cdot 2\,\pi} - e^{3\pi}\right) \\ &= \frac{2\,R^3}{3}\,.\end{aligned}$$

(b) Mit der Stammfunktion $F(z) = \frac{z^3}{3}$ gilt:

$$\int\limits_{\Gamma} z^2 \, dz = \frac{\left(R\, e^{2\,\pi\, i}\right)^3}{3} - \frac{\left(R\, e^{\pi\, i}\right)^3}{3} = \frac{2\, R^3}{3}\,.$$