KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker/Mechatroniker

25.9.2007

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}\,y^3\,, \quad y > 0\,.$$
Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Lösungen erklärt?

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:
$$y''' + 3\,y' = x^2\,.$$

3. Für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
gilt
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$
Berechnen Sie die Matrixexponentialfunktion $e^{A\,x}$ und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $Y' = AY$.

4. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Funktion:
$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\,, \quad z \neq 0\,, z \in \mathbb{C}\,.$$
Welches Bild besitzt der Kreis: $z(\phi) = 2\,e^{\phi\,i}\,, \quad 0 \leq \phi < 2\pi\,.$

5. Berechnen Sie
$$\int\limits_{\Gamma} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,dz$$
über den Weg Γ längs der reellen Achse:
$$z = x\,, \quad 0 \leq x \leq 6\,.$$
Welcher Wert ergibt sich für das Kurvenintegral, wenn man den Weg Γ durch eine glatte Kurve in $\mathbb{C}$ ersetzt, die von $z_1 = 0$ nach $z_2 = 6$ verläuft?

Lösungen

1.) Trennung der Veränderlichen ergibt:

$$\int 2\,\frac{1}{y^3}\,dy = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\,.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Beziehung

$$-\frac{1}{y^2} = \arctan(x) + c \quad \text{bzw.} \quad y = \sqrt{-\frac{1}{\arctan(x)+c}}\,.$$

Die Lösungen sind erklärt für $\arctan(x)+c<0$ bzw. $\arctan(x) < -c$. Konstante $-c < -\frac{\pi}{2}$ scheiden also aus. Konstante $-c \geq \frac{\pi}{2}$ ergeben Lösungen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärt sind. Für Konstante mit $-\frac{\pi}{2} < -c < \frac{\pi}{2}$ lautet der Definitionsbereich der Lösung: $x < -\tan(c)$.

2.) Das charakteristische Polynom (der homogenen Gleichung) lautet:

$$\lambda^3 + 3\,\lambda$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{3}\,i$. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h(x) = c_1 + c_2\,\cos(\sqrt{3}\,x) + c_3\,\sin(\sqrt{3}\,x)\,.$$

Nach der Ansatzmethode gibt es eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung der Gestalt:

$$y_p(x) = x\,(a\,x^2 + b\,x + c)\,.$$

Man sieht sofort durch Einsetzen:

$$y_p(x) = \frac{1}{9}\,x^3 - \frac{2}{9}\,x\,.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2\,\cos(\sqrt{2}\,x) + c_3\,\sin(\sqrt{2}\,x) + \frac{1}{9}\,x^3 - \frac{2}{9}\,x\,.$$

3) Nach Definition der Matrixexponentialfunktion gilt:

$$e^{A\,x} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k\,\frac{x^k}{k!} = E + A\,x + A^2\,\frac{x^2}{2}\,.$$

Hieraus folgt:

$$e^{A\,x} = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aus der Matrixexponentialfunktion entnimmt man das Fundamentalsystem:

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad Y_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ x \\ 1 \end{pmatrix} .$$

4) Spalten wir $f(z)$ in Real- und Imaginrteil auf, so bekommen wir:

$$f(x+y\,i) = u(x,y) + v(x,y)\,i = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)\,i\,.$$

Wir bilden den Kreis ab:

$$\begin{aligned} u(2\,\cos(\phi), 2\,\sin(\phi)) &= \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right)\cos(\phi) = \frac{3}{4}\,\cos(\phi)\,, \\ v(2\,\cos(\phi), 2\,\sin(\phi)) &= \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)\sin(\phi) = \frac{1}{4}\,\sin(\phi)\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Bild die Ellipse:

$$\frac{u^2}{\frac{9}{16}} + \frac{v^2}{\frac{1}{16}} = 1\,.$$

5) Wir berechnen längs der reellen Achse:

$$\begin{aligned} \int\limits_\Gamma \frac{z^2-1}{z^2+1}\,dz &= \int\limits_\Gamma \frac{z^2-1}{z^2+1}\,dz = \int\limits_0^6 \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx \\ &= \int\limits_0^6 \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}\right)\,dx = \int\limits_0^6 \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)\,dx \\ &= 6 - 2\,\arctan(6)\,. \end{aligned}$$

Das Kurvenintegral ist wegunabhängig. Wir bekommen also denselben Wert.