KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker/Mechatroniker

24.3.2009

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = \tan(x)\, y^3\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

   Geben Sie den Definitionsbereich der Lösungen an.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$$y'' - 2\,y' + y = e^x\,.$$

   Verwenden sie die Ansatzmethode.

3. Gegeben ist das Differenzialgleichungssystem:

$$Y' = A\,Y\,, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

   Geben Sie ein Fundamentalsystem an, indem Sie (a) zu einer Einzeldifferenzialgleichung übergehen und (b) indem Sie die Matrixexponentialfunktion $e^{A\,x}$ berechnen.

4. Sei $z = x + y\,i$, $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Realteil und Imaginärteil der Sinusfunktion werden gegeben durch:

$$\sin(z) = \sin(x + y\,i) = \sin(x)\,\cosh(y) + \cos(x)\,\sinh(y)\,i\,.$$

   (a) Zeigen Sie: $\overline{\sin(z)} = \sin(\bar{z})$.
   (b) Zeigen Sie, dass Realteil und Imaginärteil die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichngen erfüllen.
   (c) Geben Sie die Bilder der Geraden $y = y_0$, $y_0 \neq 0$, unter der Sinusfunktion an.

5. Sei $f(z) = z^2$. Die Kurve Γ werde gegeben durch $\Gamma = \{z(t)\,|\,z(t) = t + t\,i\,, t \in [0,1]\}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\Gamma f(z)\,dz$ (a) direkt anhand der Definition und (b) mithillfe einer Stammfunktion.

Lösungen

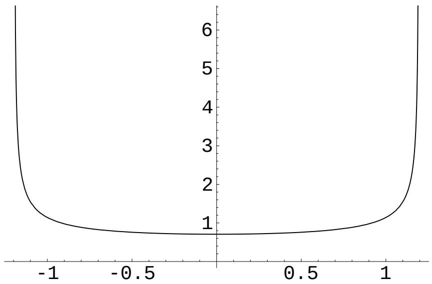
1.) Trennung der Veränderlichen ergibt:

$$\int \frac{1}{y^3}\,dy = \int \tan(x)\,dx\,.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Beziehung

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{y^2} = -\ln(\cos(x)) + C \quad \text{bzw.} \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\ln(\cos(x)) + c}}\,.$$

Das Pluszeichen bzw. das Minuszeichen steht für Lösungen in der oberen bzw. unteren Halbebene. Außerdem ist $y = 0$ eine Lösung. Die Lösungen sind erklärt für $\ln(\cos(x)) + c > 0$ bzw. $\cos(x) > e^{-c}$, $c > 0$, also für $-\arccos(e^{-c}) < x < \arccos(e^{-c})$.



Lösung für $c = 1$

2.) Das charakteristische Polynom (der homogenen Gleichung) lautet:

$$\lambda^2 + 2\,\lambda + 1 = 0$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$y_h(x) = c_1\,e^x + c_2\,x\,e^x\,.$$

Nach der Ansatzmethode gibt es eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung der Gestalt:

$$y_p(x) = a\,x^2\,e^x\,.$$

Einsetzen ergibt:

$$a\,(x^2 + 4\,x + 2)\,e^x - 2\,a\,(x^2 + 2\,x)\,e^x + a\,x^2\,e^x = e^x\,,$$

also:

$$2\,a\,e^x = e^x \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{1}{2}\,.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1\,e^x + c_2\,x\,e^x + \frac{1}{2}\,x^2\,e^x\,.$$

Variation der Konstanten ergibt den Ansatz:

$$y_p(x) = c_{p1}(x)\,e^x + c_{p2}(x)\,x\,e^x$$

mit

$$e^x\,c'_{p1}(x) + x\,e^x\,c'_{p2}(x) = 0\,, \quad e^x\,c'_{p1}(x) + (x+1)\,e^x\,c'_{p2}(x) = e^x\,.$$

Auflösen liefert:

$$c'_{p1}(x) = -x\,, \quad c'_{p2}(x) = 1\,,$$

bzw.

$$c_{p1}(x) = -\frac{x^2}{2}\,, \quad c_{p2}(x) = x\,.$$

3a) Das System lautet ausgeschrieben mit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$:

$$y'_1 = -y_2\,, \quad y'_2 = -y_1\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$y''_1 - y_1 = 0\,, \quad y_2 = -y'_1\,.$$

Die Gleichung zweiter Ordnung besitzt folgendes Fundamentalsystem: e^x, e^{-x}. Daraus ergibt sich ein Fundamentalsystem für das System:

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \end{pmatrix}\,, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}\,.$$

Man kann genauso von einer Einzeldifferenzialgleichung für y_2 ausgehen:

$$y''_2 - y_2 = 0\,.$$

Man bekommt dann analog das Fundamentalsystem des Systems:

$$-Y_1(x)\,, \quad Y_2(x)\,.$$

3b) Das charakteristische Polynom von A lautet:

$$\det(A - \lambda\, E) = \lambda^2 - 1\,.$$

Also gilt:

$$A^2 - E = O\,.$$

Hieraus folgt:

$$A^3 = A\,, A^4 = E\,, \dots, A^{2\,k} = E\,, A^{2\,k+1} = A\,.$$

Nach Definition der Matrixexponentialfunktion gilt:

$$e^{A\,x} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k\,\frac{x^k}{k!} = E\,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2\,k}}{(2\,k)!} + A\,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2\,k+1}}{(2\,k+1)!} = E\,\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + A\,\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\,.$$

Aus der Matrixexponentialfunktion entnimmt man das Fundamentalsystem:

$$\tilde{Y}_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ -\frac{e^x-e^{-x}}{2} \end{pmatrix} = Y_1(x) + Y_2(x)\,, \quad \tilde{Y}_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{e^x-e^{-x}}{2} \\ \frac{e^x+e^{-x}}{2} \end{pmatrix} = -Y_1(x) + Y_2(x)\,.$$

4a) Aus der Gleichung

$$\sin(z) = \sin(x + y\,i) = \sin(x)\,\cosh(y) + \cos(x)\,\sinh(y)\,i$$

bekommen wir:

$$\begin{aligned} \sin(\bar{z}) &= \sin(x - y\,i) \\ &= \sin(x)\,\cosh(-y) + \cos(x)\,\sinh(-y)\,i \\ &= \sin(x)\,\cosh(y) - \cos(x)\,\sinh(y)\,i \\ &= \overline{\sin(z)}\,. \end{aligned}$$

4b) Wir schreiben Real- und Imaginärteil:

$$u(x,y) = \sin(x)\,\cosh(y)\,, \quad v(x,y) = \cos(x)\,\sinh(y)$$

und berechnen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \cos(x)\,\cosh(y)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \sin(x)\,\sinh(y)\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\sin(x)\,\sinh(y)\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \cos(x)\,\cosh(y)\,,$$

also:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,.$$

4c) Wir bilden $z = x + y_0\, i$, $y_0 \neq 0$, ab und bekommen $w = u + v\, i$:

$$u = \sin(x)\,\cosh(y_0)\,, \quad v = \cos(x)\,\sinh(y_0)\,.$$

Damit gilt:

$$\frac{u^2}{(\cosh(y_0))^2} + \frac{v^2}{(\sinh(y_0))^2} = 1\,.$$

(Ellipse in der w-Ebene, Mittelpunkt (0,0), Halbachsen $(\cosh(y_0))^2$ und $\sinh(y_0))^2$).

5) Wir berechnen das Kurvenintegral direkt. Mit $z'(t) = 1 + i$ bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz &= \int\limits_0^1 (t + t\,i)^2\,(1+i)\,dt \\
&= \int\limits_0^1 (t^2 + 2\,t^{\,2}\,i - t^2)\,(1+i)\,dt = \int\limits_0^1 2\,t^{\,2}\,i\,(1+i)\,dt \\
&= \int\limits_0^1 (-2\,t^2 + 2\,t^2\,i)\,dt = \left(-\frac{2}{3}\,t^3 + \frac{2}{3}\,t^3\,i\right)\Bigg|_0^1 \\
&= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\,i\,.
\end{aligned}$$

Mit der Stammfunktion:

$$F(z) = \frac{z^3}{3}$$

ergibt sich:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \frac{z^3}{3}\Bigg|_{z=0}^{z=1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{1 + 3\,i + 3\,i^2 + i^3}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\,i\,.$$