KLAUSUR

Mathematik IV (E)

21. 3. 2002

Wolfram Koepf

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 10 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei folgende Tabelle von Stützwerten und Stützstellen:

i	0	1	2
x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
y_i	0	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$	1

   Man bestimme das Interpolationspolynom $L_2(x)$ zweiten Grades in der Form von Lagrange und gebe eine Abschätzung des Interpolationsfehlers im Intervall $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. **(7P)**

2. Man bestimme die Kreiszahl π auf 6 Dezimalstellen durch Anwendung des Newtonverfahrens auf die Funktion $f(x) = \sin x$. **(4P)**

3. Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	4	6	8
y_i	2	4	5	8	10

   Man bestimme die Regressionsgerade (Ausgleichsgerade) nach der Gaußschen Fehlerquadratmethode. **(4P)**

4. Durch $Q_2(f) = A_0\, f(-1) + A_1\, f(0) + A_2\, f(1)$ werde eine Quadraturformel für das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ dargestellt. Man bestimme die Gewichte A_0, A_1, A_2 so, dass Polynome vom Grad ≤ 2 exakt integriert werden. Man wende die Quadraturformel auf das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^x\, dx$ an und vergleiche das Ergebnis mit dem exakten Wert des Integrals. **(5P)**

Lösungen

1.) Mit $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ergibt sich:

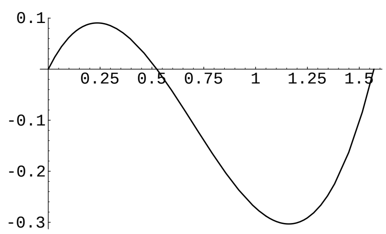
$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_0\, L_{2,0}(x) + y_1\, L_{2,1}(x) + y_2\, L_{2,2}(x) \\ &= \frac{6x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\pi^2} - \frac{9x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^2} \\ &= \frac{7x}{2\pi} - \frac{3x^2}{\pi^2}\,. \end{aligned}$$

Mit $f(x) = \sin(x)$, $n = 2$ und $f'''(x) = \cos(x)$ bekommen wir zunächst die Abschätzung:

$$|\sin(x) - L_2(x)| \le \frac{1}{6} \max_{0\le x\le \frac{\pi}{2}} |\cos(x)| \max_{0\le x\le \frac{\pi}{2}} \left|\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)\right|\,.$$

Ferner rechnet man leicht nach, dass die Funktion

$$\omega(x) := \prod_{i=0}^{2}(x-x_i) = x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$



Das Hilfspolynom
$\omega(x) = x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

an den Stellen

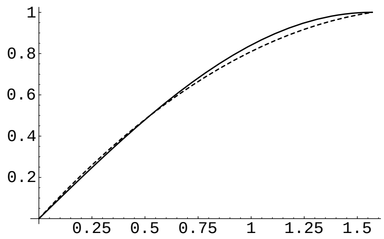
$$\frac{\pi}{18}\,(4-\sqrt{7}) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi}{18}\,(4+\sqrt{7})$$

ein Maximum bzw. ein Minimum annimmt. Die Auswertung an den Extremalstellen ergibt:

$$\left|\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)\right| \le \frac{\pi^3\left(7\sqrt{7}+10\right)}{2916}\,.$$

Insgesamt ergibt sich damit folgende Abschätzung für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$:

$$|\sin(x) - L_2(x)| \le \frac{\pi^3\left(7\sqrt{7}+10\right)}{17496} \approx 0.0505434\,.$$



Die Sinusfunktion und (gestichelt) ihre Interpolationsfunktion $L_2(x)$

2.) Für $f(x) = \sin x$ ergibt sich

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \tan x \ .$$

Beim Newtonverfahren wird also die Funktion $g(x)$ iteriert. Beginnen wir mit dem Startwert $x_0 = 2$, so erhalten wir aus

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

die Folge (x_n) mit

n	x_n
0	2
1	4.185039863261519
2	2.4678936745146656
3	3.2661862775691066
4	3.1409439123176353
5	3.1415926536808043
6	3.141592653589793
7	3.141592653589793

und somit bereits bei der 5. Iteration auf 6 Stellen genau $\pi = 3.141592$.

3.) Gegeben sind $N = 5$ Datenpaare. Die Daten liefern die Mittelwerte

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k = \frac{21}{5}$$

und

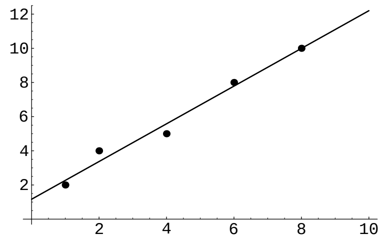
$$\overline{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k = \frac{29}{5} \ .$$

Die Steigung m der Regressionsgeraden $y = m\,x + n$ ist also gleich

$$m = \frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} x_k y_k - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} x_k^2 - \overline{x}^2} = \frac{181}{164} = 1.10366$$

und der Achsenabschnitt n ergibt sich zu

$$n = \overline{y} - m\cdot\overline{x} = \frac{191}{164} = 1.16463\ .$$



Die Regressionsgerade
$\psi_0(x) = 1.10366\,x + 1.16463$

4.) Wir machen den Ansatz

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0\,f(-1) + A_1\,f(0) + A_2\,f(1)$$

uns setzen nacheinander die Monome $f(x) = 1, x, x^2$ ein, für welche jeweils Gleichheit gelten soll, und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 &= 2 \\ -A_0 + A_2 &= 0 \\ A_0 + A_2 &= \frac{2}{3}\ . \end{aligned}$$

Dieses hat die Lösung $A_0 = \frac{1}{3}$, $A_1 = \frac{4}{3}$ sowie $A_2 = \frac{1}{3}$.

Für $f(x) = e^x$ erhalten wir

$$\int\limits_{-1}^{1} e^x\,dx = e - \frac{1}{e} \approx 2.3504\ ,$$

während die Näherung liefert

$$A_0\,f(-1) + A_1\,f(0) + A_2\,f(1) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3e} + \frac{e}{3} \approx 2.36205\ .$$