KLAUSUR

Mathematik IV (E)

7.9.2004

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Aus dem Spezialfall

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}\left(f(0) + 4\,f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right)$$

leite man die Simpson-Formel her:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

(4P)

2. Gesucht wird ein Polynom $\psi(x)$ vom Grad 2 mit folgenden Eigenschaften:

$$(\psi(0)-1)^2 + (\psi(1)-2)^2 = \min_{p=\text{Polynom vom Grad 2}} ((p(0)-1)^2 + (p(1)-2)^2)$$

und $\psi(2) = 5$.
(6P)

3. Sei $0 \leq a \leq \pi$ und

$$\phi(x) = a + 0.1\,\sin(x)\,.$$

Zeige, dass ϕ im Intervall $[-2\,\pi, 2\,\pi]$ genau einen Fixpunkt besitzt. Wie muss man n wählen, damit beim Startwert $x^{(0)} = 0$ die n-te Fixpunktiterierte $x^{(n)}$ höchstens um 0.0001 vom Fixpunkt abweicht?
(6P)

4. Das Runge-Kutta-Verfahren (mit der Schrittweite h, $x_i = x_0 + i\,h$) lautet:

$$k_0^{(i)} = h\,g\left(x_i, y_i^h\right)\ , \quad k_1^{(i)} = h\,g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{k_0^{(i)}}{2}\right)\ ,$$

$$k_2^{(i)} = h\,g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)\ , \quad k_3^{(i)} = h\,g\left(x_i + h, y_i^h + k_2^{(i)}\right)\ ,$$

$$y_{i+1}^h = y_i^h + \frac{1}{6}\left(k_0^{(i)} + 2\,k_1^{(i)} + 2\,k_2^{(i)} + k_3^{(i)}\right)\ .$$

Was ergibt sich im Fall der Differenzialgleichung $y' = y$, $y(x_0) = y_0$? Man vergleiche mit der exakten Lösung und interpretiere das Ergebnis. **(8P)**

Lösungen:

1.) Substitution: $x = (b-a)\,\xi + a$ bzw. $\xi = \frac{x-a}{b-a}$.
$x = a \Longleftrightarrow \xi = 0$, $x = \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow \xi = \frac{1}{2}$. $x = b \Longleftrightarrow \xi = 1$.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x(\xi))\,x'(\xi)\,d\xi = (b-a)\int\limits_0^1 f(x(\xi))\,d\xi.$$

Also:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,\frac{1}{6}\,\left(f(x(\xi=0)) + 4\,f\left(x(\xi=\frac{1}{2})\right) + f((\xi=1))\right)\,.$$

2.) Direkter Weg: Minimieren mit $N=1$, $n=2$, $N<n$. $x_0 = 0, x_1 = 1$, $y_0 = 1, y_1 = 2$.
Gramsche Matrix und echte Seite der Normalgleichungen:

$$\left(\sum_{i=0}^{1} x_i^{j+k}\right)_{j,k=0,1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad \left(\sum_{i=0}^{1} y_i\,x_i^j\right)_{j=0,1,2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

Lösung der Normalgleichungen:

$$c^{(0)} = 1\,, \quad c^{(1)} = 1-\lambda\,, \quad c^{(2)} = \lambda\,,$$

$$p(x) = x + 1 + \lambda\,(x^2 - x)\,.$$

(Interpolationspolynom: $x+1$). $\psi(2) = 5 \Longrightarrow \lambda = 1$, also $\psi(x) = x^2 + 1$.
Anderer Weg: Berechne Interpolationspolynom ψ vom Grad 2 mit Sttzstellen/-werten $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2$, $y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 5$. Minimalforderung wird erfüllt, da Summe der Fehlerquadrate gleich 0. $\psi(x) = x^2 + 1$.
Minimieren mit drei Stützstellen:

$$(\psi(0)-1)^2 + (\psi(1)-2)^2 + (\psi(2)-5)^2 \longrightarrow \text{min}$$

führt zum selben Ergebnis, nämlich dem Interpolationspolynom.
3.) Voraussetzungen des Fixpunktsatzes.
1.) $|\phi(x)| \leq \pi + 0.1 \leq 2\,\pi$,

2.) $|\phi'(x)| = 0.1\,|\cos(x)| \le 0.1 = L\,.$
A priori-Abschätzung: $|x^{(n)} - \bar{x}| \le \frac{0.1^n}{0.9}\,a \le 0.0001$ also $0.1^n \le \frac{0.0009}{a}$ bzw. $n = 4$.
(Ausnahmefall $a = 0$, $x^{(n)} = 0$, Fixpunkt $\bar{x} = 0$.)
4.)

$$k_0^{(i)} = h\,y_i^h\,, \quad k_1^{(i)} = h\,\left(y_i^h + \frac{h}{2}\,y_i^h\right) = \left(h + \frac{h^2}{2}\right)\,y_i^h\,, \ldots$$

$$k_2^{(i)} = \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right)\,y_i^h\,, \quad k_3^{(i)} = \left(h + h^2 + \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{4}\right)\,y_i^h\,,$$

$$y_{i+1}^h = \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right)\,y_i^h\,.$$

Exakte Lösung des AWP's: $y(x) = y_0\,e^{x-x_0}$:

$$y(x+h) = y_0\,e^{x+h-x_0} = y(x)\,e^h = \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + \cdots\right)\,y(x)\,.$$