KLAUSUR

Mathematik IV (E)

13.9.2005

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Gegeben seien die Wertepaare:

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
y_i	1	2	0

Welche Polynome höchstens dritten Grades

$$\psi(x) = c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + c_3\, x^3 \,,$$

minimieren die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=0}^{2} (y_i - \psi(x_i))^2 ?$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.
(8P)

2. Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ werde mithilfe der summierten Trapezregel $Q_{1,N}$ integriert. Wir unterteilen dabei das Intervall $[a,b]$ jeweils in $N_j = 2^{j-1}$ Teilintervalle. Wie lauten die ersten drei summierten Trapezformeln Q_{1,N_1}, Q_{1,N_2}, Q_{1,N_3}?
Welche bekannte Quadraturformel liefert der Ausdruck

$$\frac{4\, Q_{1,N_2} - Q_{1,N_1}}{3} ?$$

(8P)

3. Zeigen Sie mit dem Fixpunktsatz, dass die Gleichung

$$x = \phi(x) = \frac{1}{3}\, e^{x^2-1}$$

im Intervall [0,1] genau eine Lösung $\tilde{x}$ besitzt. Wieviele Iterationsschritte $x^{(\nu+1)} = \phi(x^{(\nu)})$ müssen durchgeführt werden, damit der Fehler $|x^{(\nu)} - \tilde{x}| \leq 10^{-8}$ wird, wenn man $x^{(0)} = 1$ wählt.

(8P)

Lösungen:

1.) Offenbar gilt $N = 2$ und $n = 3$, also $N < n$. Das System der Normalgleichungen ist also nicht eindeutig lösbar. Wir stellen die Gramsche Matrix auf

$$a_{j,k} = \sum_{i=0}^{2} x_i^{j+k} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(Ihre Determinante ergibt Null). Die rechte Seite der Normalgleichungen lautet:

$$\sum_{i=0}^{2} y_i \, x_i^j = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Die Normalgleichungen besitzen folgende Lösung:

$$c_0 = 2 \,, \quad c_1 = -\frac{1}{2} - \lambda \,, \quad c_2 = -\frac{3}{2} \,, \quad c_3 = \lambda \,, \quad \lambda \in \mathbb{R} \,,$$

und die Polynome

$$\psi(x) = 2 - \frac{1}{2} \, x - \frac{3}{2} \, x^2 + \lambda \, (-x + x^3)$$

minimieren die Fehlerquadrate. (Die Summe der Fehlerquadrate ergibt Null). Das Polynom

$$2 - \frac{1}{2} \, x - \frac{3}{2} \, x^2$$

stellt das Interpolationspolynom dar, das Polynom

$$-x + x^3$$

verschwindet an den Stützstellen und liefert den Beitrag Null zu den Fehlerquadraten.

2.) Wir erhalten allgemein die summierte Trapezregel:

$$Q_{1,N_j} = \frac{h_j}{2} \left(f(a) + 2 \, f(a + h_j) + \cdots + 2 \, f(a + (2^{j-1} - 1) \, h_j) + f(b) \right) ,$$

$$h_j = \frac{b-a}{2^{j-1}}\,, \quad j \geq 1\,.$$

Mit

$$h_1 = b-a, \quad h_2 = \frac{b-a}{2}, \quad h_3 = \frac{b-a}{4}$$

bekommen wir die ersten drei Werte:

$$\begin{aligned}
Q_{1,N_1} &= \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))\,,\\
Q_{1,N_2} &= \frac{b-a}{4}\,\left(f(a)+2\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right),\\
Q_{1,N_3} &= \frac{b-a}{8}\,\left(f(a)+2\,f\left(a+\frac{b-a}{4}\right)+2\,f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)+2\,f\left(a+3\,\frac{b-a}{4}\right)+f(b)\right).
\end{aligned}$$

Wir formen um:

$$\begin{aligned}
\frac{4\,Q_{1,N_2}-Q_{1,N_1}}{3} &= \frac{b-a}{3}\,\left(f(a)+2\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\\
&\quad -\frac{b-a}{6}\,(f(a)+f(b))\\
&= \frac{b-a}{6}\,f(a)+2\,\frac{b-a}{3}\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{6}\,f(b)\\
&= \frac{b-a}{6}\,\left(f(a)+4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)
\end{aligned}$$

und erhalten die Simpson-Regel.

3.)

Die Funktion $\phi(x) = \frac{1}{3}\,e^{x^2-1}$ ist im Intervall $[0,1]$ streng monoton wachsend. Es gilt für $x \in [0,1]$:

$$\frac{1}{3}\,e^{-1} \leq \phi(x) \leq \frac{1}{3}\,e^0 = \frac{1}{3}\,,$$

also $\phi([0,1]) \subset [0,1]$. Die Ableitung

$$\phi'(x) = \frac{2}{3}\,x\,e^{x^2-1}$$

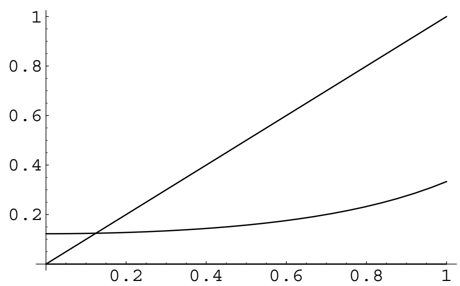
ist für $x \in [0,1]$ beschränkt:

$$|\phi'(x)| \leq \frac{2}{3}\,e^0 = \frac{2}{3}\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz bekommt man eine Lipschitzbedingung mit der Konstanten $L = \frac{2}{3}$:

$$|\phi(x) - \phi(\tilde{x})| \leq \frac{1}{2}\,|x - \tilde{x}|\,, \quad \text{für alle} \quad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}\,,$$

und es existiert genau ein Fixpunkt $\tilde{x}$.



Die Schrittfunktion $\phi(x)$ mit der Funktion $f(x) = x$ im Intervall $[0,1]$

Betrachten wir nun die Iterationsfolge $x^{(\nu+1)} = \phi(x^{(\nu)})$ mit dem Startwert $x^{(0)} = 1$. Die erste Iterierte lautet $x^{(1)} = \frac{1}{3}$, und die a priori-Fehlerabschätzung liefert für $\nu \geq 1$:

$$|x^{(\nu)} - \tilde{x}| \leq \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu}}{1 - \frac{2}{3}}\,\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right| = 2\,\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu}\,.$$

Die Forderung:

$$2\,\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu} \leq 10^{-8} \quad \Longleftrightarrow \quad \nu\,\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq -8\,\ln(10) - \ln(2)$$

bedeutet

$$\nu \geq -\frac{8\,\ln(10) + \ln(2)}{\ln(2) - \ln(3)} = 47.1405...$$

Man benötigt also 48 Iterationsschritte.