KLAUSUR

Mathematik IV (E)

17.9.2007

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung des folgenden Polynoms um $x_0 = -1$ mit dem vollständigen Horner-Schema:

$$p_3(x) = 2\,x^3 + x - 1\,.$$

2. Berechnen Sie das zu den Stützstellen und Stützwerten

i	0	1	2
x_i	0	1	3
y_i	4	0	1

gehörige Interpolationspolynom höchstens zweiten Grades (a) mit der Methode von Lagrange, (b) mit der Methode von Newton.

3. Gegeben seien $N+1$ Paare von Stützstellen und Stützwerten (x_i, y_i), $i = 0, 1, ..., N$. Wie lauten die Normalgleichungen zur Bestimmung des Ausgleichspolynoms vom Grad $n = 1$ (Ausgleichsgerade)? Lösen Sie die Normalgleichungen im Sonderfall $N = 0$.

4. Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int\limits_{-h}^{h} (x-h)^2\,dx$ mit der Simpson-Regel und vergleichen Sie mit dem exakten Wert. Erklären Sie das Resultat.

5. Zeigen Sie mit dem Fixpunktsatz, dass die Gleichung:

$$\phi(x) = x\,, \quad \phi(x) = \frac{1}{4}\,e^{-x^3}\,,$$

genau eine Lösung $\bar{x}$ im Intervall $[0,1]$ besitzt. Geben Sie für $\nu \geq 1$ eine Abschätzung des Fehlers

$$|x^{(\nu)} - \bar{x}|\,, \quad x^{(\nu)} = \phi(x^{(\nu-1)})\,, \quad x^{(0)} = 0\,.$$

Lösungen:

1.) Das vollständige Horner-Schema lautet für $x_0 = -1$:

p_3	2	0	1	-1
$x_0 = -1$	0	-2	2	-3
p_2	2	-2	3	$-4 = p_3(-1)$
$x_0 = -1$	0	-2	4	
p_1	2	-4	$-7 = \frac{p_3'(-1)}{1!}$	
$x_0 = -1$	0	-2		
p_0	2	$-6 = \frac{p_3''(-1)}{2!}$		
$x_0 = -1$	0			
	$2 = \frac{p_3'''(-1)}{3!}$			

Hieraus ergibt sich die Taylorentwicklung um $x_0 = -1$:

$$p_3(x) = -4 + 7\,(x+1) - 6\,(x+1)^2 + 2\,(x+1)^3\,.$$

2.) (a) Mit der Methode von Lagrange bekommt man:

$$L_2(x) = y_0\,L_{2,0}(x) + y_1\,L_{2,1}(x) + y_2\,L_{2,2}(x)$$

mit den Basispolynomen:

$$\begin{aligned}
L_{2,0}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{3}\,x^2 - \frac{4}{3}\,x + 1\,,\\
L_{2,1}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{3}{2}\,x\,,\\
L_{2,2}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{6}\,x\,.
\end{aligned}$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$L_2(x) = \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{11}{2}\,x + 4\,.$$

(b) Die zur Darstellung des Interpolationspolynoms in der Form von Newton benötigten dividierten Differenzen entnimmt man dem Schema:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & \boxed{4} & & \\ & & \boxed{-4} & \\ 1 & 0 & & \boxed{\frac{3}{2}} \\ & & \frac{1}{2} & \\ 3 & 1 & & \end{array}$$

Es ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} N_2(x) &= y[x_0] + y[x_0, x_1]\,(x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &= 4 - 4\,x + \frac{3}{2}\,x\,(x - 1) \\ &= \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{11}{2}\,x + 4\,. \end{aligned}$$

3.) Die Normalgleichungen zur Bestimmung der Ausgleichsgerade $c_0^{(0)} + c_1^{(0)}\,x$ lauten:

$$\left(\sum_{i=0}^{N} x_i^0\right)\,c_0^{(0)} + \left(\sum_{i=0}^{N} x_i^1\right)\,c_1^{(0)} = \sum_{i=0}^{N} y_i\,x_i^0\,,$$
$$\left(\sum_{i=0}^{N} x_i^1\right)\,c_0^{(0)} + \left(\sum_{i=0}^{N} x_i^2\right)\,c_1^{(0)} = \sum_{i=0}^{N} y_i\,x_i^1\,.$$

Im Sonderfall $N = 0$ ergibt sich das System:

$$x_0^0\,c_0^{(0)} + x_0^1\,c_1^{(0)} = y_0\,x_0^0\,,$$
$$x_0^1\,c_0^{(0)} + x_0^2\,c_1^{(0)} = y_0\,x_0^1\,,$$

mit den Lösungen:

$$c_1^{(0)} = \lambda\,,\quad c_0^{(0)} = -x_0\,\lambda + y_0\,,\quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

4.) Der exakte Wert lautet:

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \int_{-h}^{h} (x - h)^2\,dx = \left.\frac{(x - h)^3}{3}\right|_{x=-h}^{x=h} = \frac{8}{3}\,h^3\,.$$

Mit $a = -h$ und $b = h$ nimmt die Simpson-Regel folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} Q_2(f) &= \frac{b - a}{6}\left(f(a) + 4\,f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b)\right) \\ &= \frac{2\,h}{6}\,(f(-h) + 4\,f(0) + f(h)) \\ &= \frac{h}{3}\,((-2\,h)^2 + 4\,(-h)^2 + 0^2) = \frac{8}{3}\,h^3\,. \end{aligned}$$

Die Simpson-Regel integriert Polynome bis zum Grad 3 exakt.
5.) Es gilt für $x \in [0,1]$:

$$0 \leq \phi(x) = \frac{1}{4}\, e^{-x^3} \leq \frac{1}{4}$$

und

$$|\phi'(x)| = \left| -\frac{3}{4}\, x^2\, e^{-x^3} \right| \leq \frac{3}{4}\,.$$

Also bildet ϕ das Intervall $[0,1]$ in sich ab und erfüllt eine Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten $L = \frac{3}{4}$. Es gibt genau einen Fixpunkt. Die a priori-Fehlerabschätzung ergibt:

$$|x^{(\nu)} - \bar{x}| \leq \frac{L^\nu}{1-L} \left| x^{(1)} - x^{(0)} \right| = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^\nu}{1-\frac{3}{4}} \left| \frac{1}{4} - 0 \right| = \left(\frac{3}{4} \right)^\nu \,.$$