KLAUSUR

Mathematik IV

15.9.2009

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 8 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 16 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Gegeben sei das Polynom $p_3(x) = 2\,x^3 + 7\,x^2 - 9$.
(a) Berechnen Sie $p_3(-2)$ mit dem Horner-Schema. Wie lautet das Polynom $p_2(x)$ in der Darstellung: $p_3(x) = (x+2)\,p_2(x) + p_3(-2)$?
(b) Entwickeln Sie $p_3(x)$ nach Potenzen von $x+2$.
(c) Gegeben seien die Stützstellen: $x_0 = -2\,, x_1 = -1\,, x_2 = 0\,, x_3 = 1\,,$ und die Stützwerte: $y_i = p_3(x_i), i = 0, 1, 2, 3$. Berechnen Sie die Newton-Form des Interpolationspolynoms dritten Grades.

2. Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, mit den Stützwerten $y_0 = 2$, $y_1 = 4$, $y_2 = 6$.
(a) Bestimmen Sie das Ausgleichspolynom höchstens ersten Grades sowie das Ausgleichspolynom höchstens zweiten Grades.
(b) Bestimmen Sie alle Ausgleichspolynome vom Grad 3.
Geben Sie jeweils die Normalgleichungen an.

3. (a) Wenden Sie die Simpson-Regel $Q_2(f)$ auf das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx$ an und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Wert des Integrals. Welche Abschätzung des Quadraturfehlers ergibt sich aus der Formel:
$$|E_2(f)| \le \frac{1}{3!} \max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f'''(x)| \, \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 192} \;?$$
(b) Welchen Näherungswert erhält man für das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx$ mit der Summierten Trapezregel $Q_{1,2}(f)$? Welche Fehlerabschätzung ergibt sich?

4. Gegeben sei die Funktion $\phi(x) = \frac{1}{3}\,\sin(x) + \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$. Zeigen Sie mit dem Fixpunktsatz, dass die Gleichung $\phi(x) = x$ genau eine Lösung $\bar{x}$ im Intervall $[0, 2]$ besitzt. Wie oft muss man iterieren, damit der Fehler $|x^{(\nu)} - \bar{x}|$ kleiner als 10^{-3} wird, bei $x^{(0)} = 0$, $x^{(\nu+1)} = \phi(x^{(\nu)})$.

Lösungen:

1.a) Das Horner-Schema liefert die Koeffizienten des Polynoms $p_2(x)$ in der Darstellung

$$p_3(x) = p_2(x)\ (x+2) + p_3\,(-2)\ .$$

Das Horner-Schema lautet für $x_0 = -2$:

$$\begin{array}{r|llll}
p_3 & 2 & 7 & 0 & -9 \\
x_0 = -2 & 0 & -4 & -6 & 12 \\
\hline
p_2 & 2 & 3 & -6 & \mid 3 = p_3(-2)
\end{array}$$

Wir lesen ab: $p_2(x) = 2\,x^2 + 3\,x - 6$ und bekommen:

$$p_3(x) = (x+2)\ p_2(x) + p_3(-2) = (x+2)\ \left(2\,x^2 + 3\,x - 6\right) + 3\,.$$

1.b) Das vollständige Horner-Schema lautet:

$$\begin{array}{r|llll}
p_3 & 2 & 7 & 0 & -9 \\
x_0 = -2 & 0 & -4 & -6 & 12 \\
\hline
p_2 & 2 & 3 & -6 & \mid 3 = p_3(-2) \\
x_0 = -2 & 0 & -4 & 2 & \\
\hline
p_1 & 2 & \text{-1} & \mid -4 = p_2(-2) & \\
x_0 = -2 & 0 & -4 & & \\
\hline
p_0 & 2 & \mid -5 = p_1(-2) & &
\end{array}$$

Die Taylor-Entwicklung lautet:

$$p_3(x) = 3 - 4\,(x+2) - 5\,(x+2)^2 + 2\,(x+2)^3\,.$$

1.c) Wir berechnen die dividierten Differenzen nach dem Schema:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 3 & & & \\
 & & -7 & & \\
-1 & -4 & & 1 & \\
 & & -5 & & 2 \\
0 & -9 & & 7 & \\
 & & 9 & & \\
1 & 0 & & &
\end{array}
$$

Damit ergibt sich die Newton-Form:

$$p_3(x) = 3 - 7\,(x+2) + (x+2)(x+1) + 2\,(x+2)\,(x+1)\,x\,.$$

2.a) Die Normalgleichungen lauten:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{N} x_i^{j+k} \right) c_k^{(0)} = \sum_{i=0}^{N} y_i\, x_i^j\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Mit $N = 2$ ergibt sich:

$$\sum_{i=0}^{2} x_i^{j+k} = 0^{j+k} + 1 + 2^{j+k}\,,$$

$$\sum_{i=0}^{2} y_i\, x_i^j = 2 \cdot 0^j + 4 \cdot 2^j + 6 \cdot 2^j\,.$$

Die Normalgleichungen lauten für $n = 1$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}\,.$$

Die Normalgleichungen lauten für $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 28 \end{pmatrix}\,.$$

Die gegebenen Punkte liegen auf der Geraden $y = 2\,x + 2$. Das Ausgleichspolynom lautet also in beiden Fällen: $\psi(x) = 2\,x + 2$.

2.b) Die Normalgleichungen lauten für $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 17 \\ 5 & 9 & 17 & 33 \\ 9 & 17 & 33 & 65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \\ c_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 28 \\ 52 \end{pmatrix} .$$

Die Normalgleichungen sind nicht eindeutig lösbar. Wir bekommen folgende Ausgleichspolynome:

$$\psi(x) = 2\,x + 2 + \lambda\,x\,(x-1)\,(x-2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

(Ausgleichspolynom höchstens zweiten Grades plus Polynom, das an den Stützstellen verschwindet).

3.a) Mit $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $f(x) = \sin(x)$ liefert die Simpson-Regel:

$$\begin{aligned} Q_2(f) &= \frac{\pi}{12}\left(\sin(0) + 4\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{12}\,(2\,\sqrt{2}+1) \approx 1.00228\,. \end{aligned}$$

Der exakte Wert lautet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = 1\,.$$

Wir haben folgende Abschätzung des Fehlers:

$$\begin{aligned} |E_2(f)| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - L_2(x))\,dx \right| \\ &\le \frac{1}{3!} \max_{x\in[a,b]} |\sin'''(x)| \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\omega_2(x)|\,dx \\ &\le \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{192} \max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\cos(x)| \\ &= \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 192} \approx 0.0317\,. \end{aligned}$$

3.b) Die summierte Trapez-Regel ergibt:

$$Q_{1,2}(f) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.9480...$$

Der Fehler ergibt sich aus der Formel:

$$\left| \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx - Q_{1,2}(f) \right| \leq \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{12 \cdot 2^2} \max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f''(x)|\,.$$

Der Fehler beträgt: $0.08074...$

4.) Für $0 \leq x \leq 2$ gilt:

$$\frac{1}{2} \leq \phi(x) \leq \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{5}{6} < 2\,.$$

Mit

$$\phi'(x) = \frac{1}{3}\cos(x) + \frac{1}{2}$$

bekommen wir für $0 \leq x \leq 2$:

$$|\phi'(x)| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} < 1\,.$$

Die a priori-Fehlerabschätzung lautet:

$$|x^{(\nu)} - \bar{x}| \leq \frac{L^\nu}{1-L}\,|x^{(1)} - x^{(0)}|\,.$$

Mit $L = \frac{5}{6}$, $x^{(0)} = 0$, $x^{(1)} = \frac{1}{2}$ folgt:

$$|x^{(\nu)} - \bar{x}| \leq \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^\nu}{\frac{5}{6}}\,\frac{1}{2} = 3\left(\frac{5}{6}\right)^\nu\,.$$

Die Bedingung

$$3\left(\frac{5}{6}\right)^\nu \leq 10^{-3}$$

ergibt

$$\nu \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right) - 3\,\ln(10)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 43.9134...$$

also $\nu = 44$.