KLAUSUR

Mathematik IV (E)

15.9.2010

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Die summierte Trapezregel für das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ lautet:

$$Q_{1,N}(f) = \frac{b-a}{N}\left(\frac{1}{2}\,f_0 + f_1 + \ldots + f_{N-1} + \frac{1}{2}\,f_N\right)$$

   mit $h = \dfrac{b-a}{N}$ und $f_k = f(a + k\,h)$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^2 x^2\,dx$ exakt und mit der summierten Trapezregel für $N = 6$. Welche Aussage über den Quadraturfehler bekommt man mit der Fehlerformel:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = Q_{1,N}(f) - \frac{(b-a)^3}{12\,N^2}\,f''(\eta)\,?$$

   (4P)

2. (a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom vom Grad 2 zu den folgenden Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und Stützwerten mit der Methode von Lagrange: $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 5$.
   (b) Welche Polynome $\psi(x)$ vom Grad 2 minimieren die Summe der Fehlerquadrate:

$$(\psi(0) - 1)^2 + (\psi(1) - 2)^2\ ?$$

   Wie groß ist das Minimum? **(6P)**

3. Sei $a > 0$ und $\phi(x) = a + 0.1\,\cos(x)$.
   Zeigen Sie, dass ϕ genau einen Fixpunkt besitzt. Wie muss man n wählen, damit beim Startwert $x^{(0)} = 0$ die n-te Fixpunktiterierte $x^{(n)}$ höchstens um 0.0001 vom Fixpunkt abweicht? **(6P)**

4. Das Euler-Cauchy-Verfahren mit der Schrittweite h, $x_i = x_0 + i\,h$, für das Anfangswertproblem $y' = g(x,y)\,, y(x_0) = y_0$ lautet:

$$y_{i+1}^h = y_i^h + h\,g\left(x_i, y_i^h\right)\,, \quad y_0^h = y_0\,.$$

   Was ergibt sich für y_i^h im Fall der Differenzialgleichung $y' = y$, $y(x_0) = y_0$? Wie lautet die exakte Lösung $y(x)$? Was ergibt sich für $y(x_i)$? **(8P)**

Lösungen:

1.) Wir integrieren die Funktion

$$f(x) = x^2$$

über das Intervall $[a, b] = [0, 2]$. Mit $N = 6$ ergibt die summierte Trapezregel folgenden Näherungswert für das Integral:

$$Q_{1,6}(f) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1 + \frac{16}{9} + \frac{25}{9} + \frac{1}{2}\cdot 4\right) = \frac{73}{27} = 2.70\ldots .$$

Der exakte Wert des Integrals lautet:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3} = 2.66...$$

und die Differenz zum Näherungswert beträgt:

$$\int_0^2 f(x)\,dx - Q_{1,6}(f) = -\frac{1}{27}\,.$$

Mit der Fehlerdarstellung

$$\int_0^2 f(x)\,dx - Q_{1,6}(f) = -\frac{2^3}{12\cdot 6^2}\,f''(\eta) = -\frac{2^3}{12\cdot 6^2}\,2 = -\frac{1}{27}$$

ergibt sich derselbe Quadraturfehler.

2a.) Mit der Methode von Lagrange ergibt sich:

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)} + 2\,\frac{(x-x_0)\,(x-x_2)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)} + 5\,\frac{(x-x_0)\,(x-x_1)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)} = x^2+1\,.$$

2b.) Mit $N = 1$, $n = 2$, $N < n$. $x_0 = 0, x_1 = 1$, $y_0 = 1, y_1 = 2$, stellen wir die Normalgleichungen auf. Die Gramsche Matrix und die rechte Seite lauten:

$$\left(\sum_{i=0}^{1} x_i^{j+k}\right)_{j,k=0,1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(\sum_{i=0}^{1} y_i\, x_i^j\right)_{j=0,1,2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der Normalgleichungen ist nicht eindeutig:

$$c^{(0)} = 1\,, \quad c^{(1)} = 1 - \lambda\,, \quad c^{(2)} = \lambda\,,$$

also:

$$\psi(x) = c^{(0)} + c^{(1)}\,x + c^{(2)}\,x^2 = x + 1 + \lambda\,(x^2 - x)\,, \quad \lambda \neq 0\,.$$

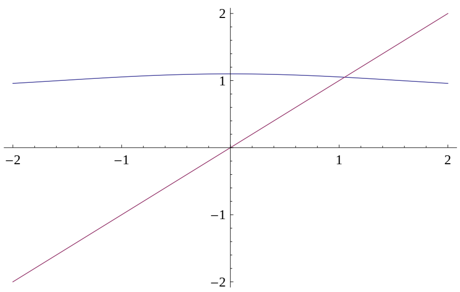
Das Minimum der Fehlerquadrate ist Null. Wählt man $\lambda = 1$, so bekommt man das Interpolationspolynom aus (a).

3.) Die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes sind im Intervall $I = \{x \mid |x| \le a + 0.1\}$ gegeben.

1.) $|\phi(x)| \le a + 0.1\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$

2.) $|\phi'(x)| = 0.1\,|\sin(x)| \le 0.1 = L\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Damit gibt es genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$. Für einen weiteren Fixpunkt mit $|\bar{x}| > a + 0.1$ bekämen wir den Widerspruch $|\bar{x}| = |\phi(\bar{x})| \le a + 0.1$. A-priori-Abschätzung: $|x^{(n)} - \bar{x}| \le \frac{0.1^n}{0.9}\,(a + 0.1) \le 0.0001$ also $0.1^n \le \frac{0.00009}{a+0.1}$.



Fixpunkt von $\phi(x) = 1 + 0.1\,\cos(x)$

4.) Das Euler-Cauchy-Verfahren lautet:

$$y_{i+1}^h = y_i^h + h\,y_i^h = y_i^h\,(1 + h)\,, \quad y_0^h = y_0\,.$$

Wir bekommen:

$$y_0^h = y_0\,, \quad y_1^h = y_0\,(1 + h)\,, \quad y_2^h = y_0\,(1 + h)^2\,, \ldots,$$
$$y_i^h = y_0\,(1 + h)^i\,.$$

Die exakte Lösung des AWP's ist:

$$y(x) = y_0\,e^{x - x_0}\,.$$

Wir bekommen:

$$y(x_i) = y_0\,e^{h\,i}\,.$$