KLAUSUR

Mathematik IV (E)

15.9.2000

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 13 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei das Polynom

$$
\begin{aligned}
p_n(x) \quad &= \quad b_0^{(0)} + b_1^{(0)}\,(x - x_0) + b_2^{(0)}\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\
&\quad\quad + \ldots + b_n^{(0)}\,(x - x_0)\cdots\,(x - x_{n-1})\,.
\end{aligned}
$$

   Man gebe ein Horner-ähnliches Rechenschema zur Berechnung des Wertes $p_n(0)$ an.**(5P)**

2. Mit dem Horner-Schema bestimme man die Taylorentwicklung des folgenden Polynoms um $x_0 = 2$: $p_3(x) = x^3 - 4\,x^2 + 6\,x - 4$. Man gebe explizit die Faktorisierung: $p_3(x) = (x - 2)\,(\alpha\,x^2 + \beta\,x + \gamma)$ an. **(5P)**

3. Man bestimme das zu den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ und Stützwerten $y_0 = 4$, $y_1 = -2$, $y_2 = 1$, gehörige Interpolationspolynom höchstens zweiten Grades (a) mit der Methode von Lagrange, (b) mit der Methode von Newton. **(5P)**

4. Durch $Q_2(f) = A_0\,f(-1) + A_1\,f(0) + A_2\,f(3)$ werde eine Quadraturformel für das Integral $\int\limits_{-1}^{3} f(x)\,dx$ dargestellt. Man bestimme die Gewichte A_0, A_1, A_2 so, dass Polynome vom Grad ≤ 2 exakt integriert werden. Man wende die Quadraturformel auf das Integral $\int\limits_{-1}^{3} e^x\,dx$ an und vergleiche das Ergebnis mit dem exakten Wert des Integrals. **(5P)**

5. Man bestimme ein Polynom $\psi^{(0)}(x)$ höchstens ersten Grades (Gerade), sodass für alle Polynome $\psi(x)$ höchstens ersten Grades (Geraden) gilt:

$$
\int\limits_{1}^{3} (\ln(x) - \psi^{(0)}(x))^2 dx \leq \int\limits_{1}^{3} (\ln(x) - \psi(x))^2 dx\,.
$$

   (5P)

Lösungen

1.) Durch sukzessives Ausklammern schreiben wir das Polynom $p_n(x)$ in der Form:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \Big(\dots\Big(\Big(b_n^{(0)}\,(x-x_{n-1}) + b_{n-1}^{(0)}\Big)\,(x-x_{n-2}) \\ &\quad + b_{n-2}^{(0)}\Big)\,(x-x_{n-3}) + \dots\Big)\,(x-x_0) + b_0^{(0)}\,. \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich nun wieder sofort aus:

$$p_n(0) =$$

$$\underbrace{\left(\dots\underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{b_n^{(0)}}_{b_n^{(1)}}(-x_{n-1}) + b_{n-1}^{(0)}\right)}_{b_{n-1}^{(1)}}(-x_{n-2}) + b_{n-2}^{(0)}\right)}_{b_{n-2}^{(1)}}(-x_{n-3}) + \dots\right)(-x_0) + b_0^{(0)}}_{b_0^{(1)}}\,.$$

Man kann die Berechnung der Koef£zienten in folgendem Schema anordnen:

$$\begin{array}{llllll} b_n^{(0)} & b_{n-1}^{(0)} & b_{n-2}^{(0)} & \dots & b_1^{(0)} & b_0^{(0)} \\ 0 & -b_n^{(1)}x_{n-1} & -b_{n-1}^{(1)}x_{n-2} & \dots & -b_2^{(1)}x_1 & -b_1^{(1)}x_0 \\ \hline b_n^{(1)} & b_{n-1}^{(1)} & b_{n-2}^{(1)} & \dots & b_1^{(1)} & \big|\; b_0^{(1)} \end{array}$$

2. Das vollständige Horner-Schema für

$$p_3(x) = x^3 - 4\,x^2 + 6\,x - 4 \quad \text{und} \quad x_0 = 2$$

lautet:

$$
\begin{array}{r|llll}
p_3 & 1 & -4 & 6 & -4 \\
x = x_0 = 2 & 0 & 2 & -4 & 4 \\
\hline
p_2 & 1 & -2 & 2 & \multicolumn{1}{|l}{0 = a_0^{(1)} = p_3(2)} \\
x = x_0 = 2 & 0 & 2 & 0 & \\
\hline
p_1 & 1 & 0 & \multicolumn{2}{|l}{2 = a_1^{(2)} = p_2(2)} \\
x = x_0 = 2 & 0 & 2 & & \\
\hline
p_0 & 1 & \multicolumn{3}{|l}{2 = a_2^{(3)} = p_1(2)}
\end{array}
$$

Es gilt

$$p_3(x) = (x - x_0)\, p_2(x) + p_3(x_0) = (x - x_0)\, p_2(x)\,.$$

Somit wird gilt:

$$\alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma = p_2(x)\,.$$

Aus dem Schema entnehmen wir:

$$p_2(x) = x^2 - 2\,x + 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad p_3(x) = (x-2)\,(x^2 - 2\,x + 2)\,.$$

Die Taylorentwicklung von p_3 um $x_0 = 2$ lautet:

$$p_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!}\, p_3^{(k)}(2)\,(x - x_0)^k \quad \text{mit} \quad p_{3-k}(2) = \frac{1}{k!}\, p_3^{(k)}(2)\,.$$

Die Koef£zienten liest man aus dem Schema ab und bekommt die Taylorentwicklung:

$$p_3(x) = 2\,(x-2) + 2\,(x-2)^2 + (x-2)^3\,.$$

3.) (a) Mit den Polynomen

$$L_{2,j}(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{2} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \qquad L_2(x) = \sum_{j=0}^{2} y_j\, L_{n,j}(x)$$

ergibt sich das Interpolationspolynom in der Form von Lagrange. Durch Einsetzen erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
L_{2,0}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)} = \frac{1}{12}\,(x^2 - 5\,x + 6)\,, \\
L_{2,1}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(2+1)(2-3)} = -\frac{1}{3}\,(x^2 - 2\,x - 3)\,, \\
L_{2,2}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(3+1)(3-2)} = \frac{1}{4}\,(x^2 - x - 2)\,,
\end{aligned}
$$

und damit:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_0 \cdot L_{2,0}(x) + y_1 \cdot L_{2,1}(x) + y_2 \cdot L_{2,2}(x) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{12}\,(x^2 - 5\,x + 6) - 2 \cdot (-\frac{1}{3}\,(x^2 - 2\,x - 3)) \\ &\quad + 1 \cdot \frac{1}{4}\,(x^2 - x - 2) \\ &= \frac{5}{4}\,x^2 - \frac{13}{4}\,x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) Das Interpolationspolynom in der Form von Newton lautet:

$$N_2(x) = \sum_{i=0}^{2} b_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \ .$$

Die Koef£zienten b_k erhält man aus

$$b_k = y[x_0, x_1, \ldots, x_k] \qquad k = 0, 1, \ldots, 2 \ ,$$

wobei $y[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ dividierte Differenzen darstellen. Mit dem Rechenschema:

$$\begin{array}{llll} x_0{=}-1 & y_0{=}4 & & \\ & & y[x_0,x_1]{=}\frac{y[x_0]-y[x_1]}{x_0-x_1}{=}\frac{4+2}{-1-2}{=}-2 & \\ x_1{=}2 & y_1{=}-2 & & y[x_0,x_1,x_2]{=}\frac{y[x_0,x_1]-y[x_1,x_2]}{x_0-x_2}{=}\frac{-2-3}{-1-3}{=}\frac{5}{4} \\ & & y[x_1,x_2]{=}\frac{y[x_1]-y[x_2]}{x_1-x_2}{=}\frac{-2-1}{2-3}{=}3 & \\ x_2{=}3 & y_2{=}1 & & \end{array}$$

läßt sich das Interpolationspolynom wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} N_2(x) &= y[x_0] + y[x_0, x_1]\,(x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)(x - x_1) \\ &= 4 - 2\,(x + 1) + \frac{5}{4}\,(x + 1)(x - 2) \\ &= \frac{5}{4}\,x^2 - \frac{13}{4}\,x - \frac{1}{2} \,. \end{aligned}$$

4.) Die Interpolationsquadraturformel

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{2} A_k f(x_k)$$

mit den Gewichten

$$A_k = \int\limits_a^b L_{2,k}(x)\,dx\ , \qquad k = 0, 1, 2\,,$$

integriert Polynome bis zum zweiten Grad exakt. Für die Gewichte A_k ergibt sich:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \int\limits_{-1}^{3} L_{2,0}(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{3} \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)}\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{3}(x^2-3x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3\,x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = -\frac{2}{3}\,, \\
A_1 &= \int\limits_{-1}^{3} L_{2,1}(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{3} \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)}\,dx = -\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{3}(x^2-2\,x-3)\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3\,x\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{32}{9}\,, \\
A_2 &= \int\limits_{-1}^{3} L_{2,2}(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{3} \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)}\,dx = \frac{1}{12}\int\limits_{-1}^{3}(x^2+x)\,dx \\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{10}{9}\,.
\end{aligned}$$

Wendet man die Quadraturformel auf das Integral $\int_{-1}^{3} e^x\,dx$ an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
Q_2(f) &= A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) \\
&= -\frac{2}{3}e^{-1} + \frac{32}{9}e^{0} + \frac{10}{9}e^{3} \\
&\approx 24,06\ .
\end{aligned}$$

Der exakte Wert lautet:

$$\int\limits_{-1}^{3} e^x\,dx = (e^x)_{-1}^{3} = e^3 - e^{-1} \approx 19,7177\,.$$

5.) Die beste Approximierende im quadratischen Mittel durch ein Polynom vom ersten Grad werde mit $\varphi^{(0)}(x) = c_0 + c_1 x$ bezeichnet. Die Koef£zienten ergeben sich aus dem Gleichungssystem:

$$\sum_{j=0}^{1} \left(\int_a^b x^{i+j}\, dx \right) c_j^{(0)} = \int_a^b x^i f(x)\, dx \,, \qquad i = 0, 1, \;,$$

bzw.

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^0\, dx\, c_0^{(0)} + \int_1^3 x^1\, dx\, c_1^{(0)} &= \int_1^3 x^0 \ln(x)\, dx \,, \\ \int_1^3 x^1\, dx\, c_0^{(0)} + \int_1^3 x^2\, dx\, c_1^{(0)} &= \int_1^3 x^1 \ln(x)\, dx \,. \end{aligned}$$

Wertet man die Integrale aus, so erhält man folgendes System:

$$\begin{aligned} 2\, c_0^{(0)} + 4\, c_1^{(0)} &= 3 \ln(3) - 2 \,, \\ 4\, c_1^{(0)} + \frac{26}{3}\, c_1^{(0)} &= \frac{9}{2} \ln(3) - 2 \,. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi^{(0)}(x) - 7 + 6\, \ln(3) + \left(3 - \frac{9}{4}\, \ln(3) \right) \approx -0,41 + 0,53\, x \,.$$