KLAUSUR

Mathematik IV für Elektrotechniker

17.3.2003

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 10 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Eine Maschine arbeite mit der Genauigkeit τ. Welcher absolute Fehler entsteht bei der Auswertung der Funktion $f(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2)$ höchstens, wenn die Eingaben mit absoluten Fehlern $\triangle x_1$ bzw. $\triangle x_2$ behaftet sind. Man verwende die Formel:

$$|\triangle_{y_r}| \approx \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right| |\triangle x_k| + |y|\, \tau\,.$$

(4P)

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} x^n &= S_{n0} + S_{n1}\, x + S_{n2}\, x\,(x-1) + S_{n3}\, x\,(x-1)\,(x-2) + \cdots \\ &\quad + S_{nn}\, x\,(x-1)\,(x-2)\, \cdots\, (x-n+1)\,. \end{aligned}$$

Man drücke die Koeffizienten S_{nk} durch dividierte Differenzen aus.
(6P)

3. Man ersetze die Sinusfunktion im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ durch das Interpolationspolynom vom Grad zwei mit den Stützstellen $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ und den Stützwerten $0, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Man gebe eine Abschätzung des Interpolationsfehlers:

$$f(x) - p_2(x) = \frac{1}{3!}\, f'''(\xi_x)\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

(6P)

4. Durch $\sum_{k=0}^{2} A_k f(x_k)$, $x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$ werde eine Quadraturformel für das Integral $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ dargestellt. Man bestimme die Gewichte A_k so, dass Polynome vom Grad 2 exakt integriert werden.
Welche Formel ergibt sich?
Man wende die Quadraturformel auf $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ an und vergleiche das Resultat mit dem exakten Wert von $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$.
(4P)

Lösungen

1.) Mit $f(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = -\sin(x_1 + x_2)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = -\sin(x_1 + x_2)$$

und

$$|\triangle_{y_r}| \approx \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right| |\triangle x_k| + |y|\,\tau$$

ergibt sich:

$$|\triangle_{y_r}| \approx |\triangle x_1| + |\triangle x_2| + \tau\,.$$

2.) Das Polynom x^n vom Grad n kann eindeutig als Interpolationspolynom dargestellt werden. Man benötigt dazu $n+1$ verschiedene Stützstellen. Die angegebene Formel stellt x^n als Newtonsches Interpolationspolynom dar mit den Stützstellen $0, 1, 2, \ldots, n$. Man erhält also die Koeffizienten als dividierte Differenzen:

$$S_{nk} = y[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,, \quad x_j = j\,, y[x_j] = j^n\,.$$

3.) Das Interpolationspolynom nimmt folgende Gestalt an:

$$p_2(x) = \frac{8 - 8\sqrt{2}}{\pi^2}\,x^2 + \frac{4\sqrt{2} - 2}{\pi}\,x\,.$$

Man benutzt dazu

$$\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

und berechnet das Interpolationspolynom nach der Methode von Lagrange. Zur Fehlerabschätzung berücksichtigt man:

$$\sin'''(x) = -\cos(x)\,.$$

Eine Kurvendiskussion ergibt

$$|(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)| = |x\,(x - \frac{\pi}{4})\,(x - \frac{\pi}{2})| \leq \frac{\pi^3}{96\sqrt{3}}\,.$$

Insgesamt können wir abschätzen:

$$|\sin(x) - p_2(x)| \leq \frac{\pi^3}{6 \cdot 96\sqrt{3}}\,.$$

4.) Wenn die Polynome $1, x, x^2$ exakt integriert werden, gelten die Bedingungen:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 &= \int_{-1}^{1} dx = 2\,, \\ -A_0 + A_2 &= \int_{-1}^{1} x\,dx = 0\,, \\ A_0 + A_2 &= \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

Als Lösung bekommt man die Gewichte:

$$A_0 = \frac{1}{3}\,, \quad A_1 = \frac{4}{3}\,, \quad A_2 = \frac{1}{3}\,.$$

Für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ liefert die Quadraturformel:

$$\sum_{k=0}^{2} A_k f(x_k) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+(-1)^2} + \frac{4}{3}\,\frac{1}{1+0^2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+1^2} = \frac{5}{3}\,.$$

Der exakte Wert lautet:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Das Integrationsintervall wird in zwei gleichlange Teilintervalle unterteilt. Es entsteht also die Simpsonformel.