KLAUSUR

Mathematik IV (E)

14.3.2001

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 11 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Gegeben seien folgend Tabelle von Stützwerten und Stützstellen:

i	0	1	2
x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y_i	0	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	1

   Man bestimme das Interpolationspolynom $L_2(x)$ in der Form von Lagrange und gebe eine Abschätzung des Interpolationsfehlers im Intervall $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. **(6P)**

2. Gegeben seien die folgende Tabelle von Stützwerten und Stützstellen:

i	0	1	2	3
x_i	1	2	3	4
y_i	1	3	4	5

   Man bestimme das Interpolationspolynom $N_3(x)$ im Fall in der Form von Newton, und bringe es anschließend mit dem modi£zierten Hornerschema in die Normalform $N_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. **(4P)**

3. Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3	4
x_i	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8
y_i	1	-0.5	-1	2	3.5

   Man bestimme die Ausgleichsgerade nach der Gaußschen Fehlerquadratmethode. **(4P)**

4. Die stetige Funktion $f : [0, h] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(h)$ erzeuge durch Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper. Man zeige, dass die Simpsonregel folgenden Näherungswert (Keplersche Fassregel) für das Volumen dieses Rotationskörpers ergibt:

$$V \approx \pi \frac{h}{12}\left(d^2 + 2\,D^2\right), \quad \frac{d}{2} = f(0) = f(h), \quad \frac{D}{2} = f\left(\frac{h}{2}\right).$$

   (Das Volumen des von f erzeugten Rotationskörpers lautet: $V = \pi \int\limits_0^h (f(x))^2\,dx$.)

   (6P)

Lösungen

1.) Mit $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_0\, L_{2,0}(x) + y_1\, L_{2,1}(x) + y_2\, L_{2,2}(x) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\, \frac{x}{\frac{\pi}{4}}\, \frac{x-\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{4}} + \frac{x}{\frac{\pi}{2}}\, \frac{x-\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{8\,(1-\sqrt{2})}{\pi^2}\, x^2 + \frac{2\,(2\sqrt{2}-1)}{\pi}\, x\,. \end{aligned}$$

Mit $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ und $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} L_3(x) &= y_0\, L_{3,0}(x) + y_1\, L_{3,1}(x) + y_2\, L_{3,2}(x) + +y_3\, L_{3,3}(x) \\ &= \frac{1}{2}\, \frac{x}{\frac{\pi}{6}}\, \frac{x-\frac{\pi}{3}}{-\frac{\pi}{6}}\, \frac{x-\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, \frac{x}{\frac{\pi}{3}}\, \frac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}\, \frac{x-\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{6}} \\ &\quad + \frac{x}{\frac{\pi}{2}}\, \frac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{3}}\, \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{54\sqrt{3}-90}{\pi^3}\, x^3 + \frac{36\sqrt{3}-63}{\pi^2}\, x^2 + \frac{11-9\sqrt{3}}{\pi}\, x\,. \end{aligned}$$

Mit $f(x) = \sin(x)$, $n = 2$ und $f'''(x) = \cos(x)$ bekommen wir zunächst die Abschätzung:

$$|\sin(x) - L_2(x)| \le \frac{1}{6} \max_{0\le x\le \frac{\pi}{2}} |\cos(x)| \max_{0\le x\le \frac{\pi}{2}} \left| \prod_{i=0}^{2} (x - x_i) \right|\,.$$

Ferner rechnet man leicht nach, dass die Funktion

$$\prod_{i=0}^{2} (x - x_i) = x\, \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\, \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

an den Stellen

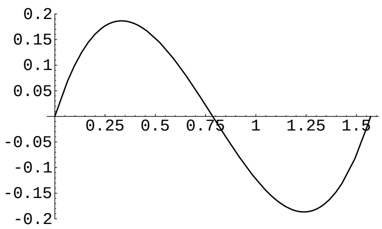
$$\frac{\pi}{12}\,(3-\sqrt{3})\,, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi}{12}\,(3+\sqrt{3})$$

ein Maximum bzw. ein Minimum annimmt. Die Auswertung an den Extremalstellen ergibt:

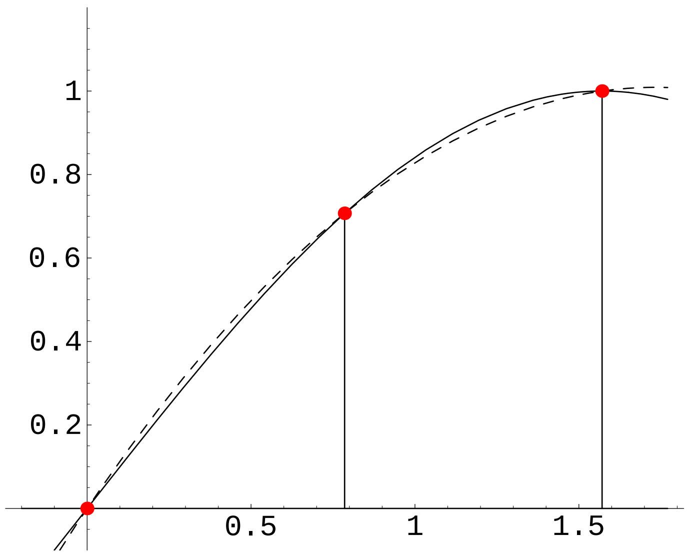
$$\left|\prod_{i=0}^{2}(x - x_i)\right| \leq \frac{\pi^3}{96\sqrt{3}} \, .$$

Insgesamt ergibt sich damit folgende Abschätzung für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

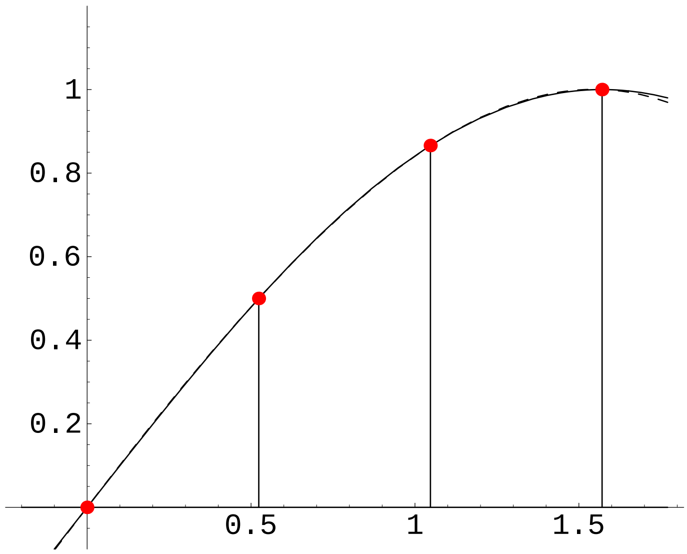
$$|\sin(x) - L_2(x)| \leq \frac{\pi^3}{6 \cdot 96\sqrt{3}} \approx 0.031 \, .$$



Das Hilfspolynom
$\omega(x) = x \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



Die Sinusfunktion und das Interpolationspolynom
$L_2(x) = \frac{8\,(1 - \sqrt{2})}{\pi^2}\, x^2 + \frac{2\,(2\sqrt{2} - 1)}{\pi}\, x$ mit Stützstellen
0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ (gestrichelt)



Die Sinusfunktion und das Interpolationspolynom
$$L_3(x) = \frac{54\sqrt{3} - 90}{\pi^3}\, x^3 + \frac{36\sqrt{3} - 63}{\pi^2}\, x^2 + \frac{11 - 9\sqrt{3}}{\pi}\, x$$
mit Stützstellen $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ (gestrichelt). Bei dem gewählten Maßstab ist fast kein Unterschied zwischen der Funktion und dem Interpolationspolynom sichtbar.

2.) Das Interpolationspolynom in der Form von Newton hat die Gestalt:

$$\begin{aligned} N_3(x) \;=\;& y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) \\ & + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + y[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,. \end{aligned}$$

Die dividierten Differenzen entnimmt man dem Schema:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
1 & \boxed{1} & & & & & & \\
 & & \boxed{2} & & & & & \\
2 & 3 & & \boxed{-\frac{1}{2}} & & & & \\
 & & 1 & & \boxed{\frac{1}{6}} & & & \\
3 & 4 & & 0 & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
4 & 5 & & & & & &
\end{array}$$

und bekommt:

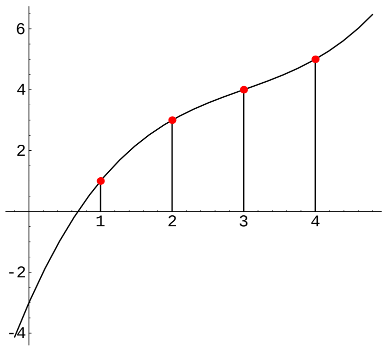
$$N_3(x) = 1 + 2\,(x-1) - \frac{1}{2}\,(x-1)\,(x-2) + \frac{1}{6}\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,.$$

Aus dem vollständigen modi£zerten Horner-Schema entnimmt man die Koef£zienten der Normalform:

$$
\begin{array}{c|ccc}
\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\
 & -\frac{1}{2} & 2 & -4 \\
\hline
\frac{1}{6} & -1 & 4 & \boxed{-3} \\
 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \\
\hline
\frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & \boxed{\frac{16}{3}} & \\
 & -\frac{1}{6} & & \\
\hline
\frac{1}{6} & \boxed{-\frac{3}{2}} & & \\
 & & & \\
\hline
\boxed{\frac{1}{6}} & & &
\end{array}
$$

Die Normalform lautet somit:

$$N_3(x) = \frac{1}{6}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{16}{3}\,x - 3\,.$$



Das Polynom
$N_3(x) = \frac{1}{6}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{16}{3}\,x - 3$

3.) Wegen $N = 4$ und $n = 1$ ist das Ausgleichsproblem eindeutig lösbar. Die Gramsche Matrix und die rechte Seite der Normalgleichungen ergeben sich zu:

$$(a_{jk})_{j,k=0,1} = \left(\sum_{i=0}^{4} x_i^{j+k}\right)_{j,k=0,1} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{151}{100} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{4} y_i\, x_i^0 \\ \sum_{i=0}^{4} y_i\, x_i^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}\,.$$

Die eindeutige Lösung der Normalgleichungen

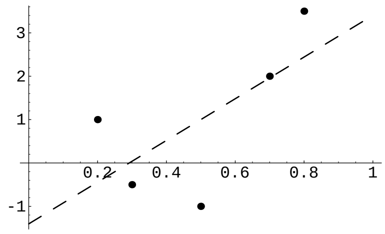
$$\begin{pmatrix} 5 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{151}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

lautet:

$$\begin{pmatrix} -\frac{73}{52} \\ \frac{125}{26} \end{pmatrix}$$

und wir erhalten die Ausgleichsgerade:

$$\psi_0(x) = -\frac{73}{52} + \frac{125}{26}\, x\,.$$



Die Ausgleichsgerade
$\psi_0(x) = -\dfrac{73}{52} + \dfrac{125}{26}\, x$

4.) Werten wir das Integral für das Volumen des Rotationskörpers mit der Simpsonregel aus, so ergibt sich zunächst:

$$Q_2(f^2) = \frac{h}{6}\, \left(f(0)^2 + 4\, f\left(\frac{h}{2}\right) + f(h) \right)$$

und wegen $f(0) = f(h) = \dfrac{d}{2}$ und $f\left(\dfrac{h}{2}\right) = \dfrac{D}{2}$ folgt:

$$Q_2(f^2) = \frac{h}{12}\, (d^2 + 2\, D^2)\,.$$

Damit erhalten wir die Keplersche Fassregel:

$$V \approx \pi\, \frac{h}{12}\, (d^2 + 2\, D^2)\,.$$