Klausur Mathematik III

(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

25. März 2008

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (3 Punkte): Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^2}{x^3}\,.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte): Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des folgenden homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= 3\,y_1 - 4\,y_2 \\ y_2' &= 2\,y_1 - 3\,y_2\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte): Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - 2\,y' + y = x^2 - 3\,x + 1 \text{ mit } y(0) = 2\,,\; y'(0) = 3\,.$$

Aufgabe 4 (7 Punkte): Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \bar{z}^2$.

a) Zeigen Sie, dass f nicht holomorph (komplex differenzierbar) ist.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_C f(z)\,dz$$

längs des Weges C, der durch

$$\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C} \text{ mit } \gamma(t) = e^{it}$$

parametrisiert ist.

Aufgabe 5 (6 Punkte): Betrachten Sie die Funktion

$$g(z) = 2\,z + \frac{z+1}{z^2 + z - 6}\,.$$

a) Berechnen Sie alle Pole von $g(z)$ und deren Residuen.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_K g(z)\,dz$$

längs des geschlossenen Kreises K, der entgegen dem Uhrzeigersinn um den Punkt $2+i$ mit Radius 2 verläuft.

Lösungen:

Aufgabe 1: Wir trennen die Variablen $y'y^{-2} = x^{-3}$ und integrieren zu

$$\int y^{-2}dy = \int x^{-3}dx + c.$$

Damit folgt $-y(x)^{-1} = -\frac{1}{2}x^{-2} + c$. Also $y(x) = \frac{2x^2}{1 - c\cdot 2x^2}$.

Aufgabe 2: Wir erhalten aus dem System von Differentialgleichungen folgende Matrix:

$$Y' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} Y.$$

Wir diagonalisieren die Matrix. Das charakteristische Polynom ist $\chi(X) = (3-X)(-3-X)+8 = X^2 - 9 + 8 = X^2 - 1$. Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert λ_1:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & | & 0 \\ 2 & -4 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir formen um und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenvektor zu λ_1 ist also $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert λ_2:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir formen um und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenvektor zu λ_2 ist also $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dann gilt $\tilde{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tilde{Y}$ für $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} Y$, beziehungsweise $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tilde{Y}$. Wir erhalten als Fundamentallösungen:

$$\tilde{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}, \text{ also } Y(x) = \begin{pmatrix} 2e^x & e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Eine Basis des Lösungsraums ist $w_1(x) = \begin{pmatrix} 2e^x \\ e^x \end{pmatrix}$, $w_2(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}$.

(Alternativ kann man auch $e^{Ax} = Se^{Dx}S^{-1}$ berechnen ...)

Aufgabe 3: Zunächst lösen wir das homogene System $y'' - 2y' + y = 0$. Das charakteristische Polynom ist $x^2 - 2x + 1$ mit doppelter Nullstelle 1. Somit erhalten wir laut Vorlesung die Basis $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$. Eine spezielle Lösung erhalten wir durch den Ansatz $y(x) = ax^2+bx+c$. Wir erhalten $y'(x) = 2ax + b$ und $y''(x) = 2a$. Also $2a - 4ax - 2b + ax^2 + bx + c = x^2 - 3x + 1$. Koeffizientenvergleich ergibt: $a = b = c = 1$.

Also $y(x) = Ae^x + Bxe^x + x^2 + x + 1$ und $y'(x) = Ae^x + Be^x + Bxe^x + 2x + 1$.
Somit $y(0) = A + 1 = 2$, also $A = 1$, und $y'(0) = A + B + 1 = B + 2 = 3,$ also $B = 1$.

Wir erhalten $y(x) = e^x + xe^x + x^2 + x + 1$.

(Alternativ: Variation der Konstanten ...)

Aufgabe 4:

(a) $f(x+iy) = (x-iy)^2 = (x^2-y^2) + i(-2xy)$.
Somit $u(x,y) = x^2 - y^2$ und $v(x,y) = -2xy$ mit $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ und $\frac{\partial v}{\partial y} = -2x$. Mit $z \neq 0$ erhalten wir $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ oder $\frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$ im Widerspruch zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Also ist f nicht holomorph.

(b)

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{e^{it}}^2 \cdot ie^{it}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2it} ie^{it}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ie^{-it}dt = [-e^{-it}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -e^{-\frac{\pi}{2}} + e^0 \\ &= -(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})) + 1 = -(0 + i(-1)) + 1 = i + 1.\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Es ist $g(z) = 2z + \frac{z+1}{z^2+z-6}$.

(a) Um die Pole zu berechnen müssen wir nur den Bruch zu betrachten. Wir führen Partialbruchzerlegung durch:

Aus $(z^2+z-6) = (z-2)(z+3)$ erhalten wir den Ansatz $\frac{z+1}{z^2+z-6} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+3}$, damit $z+1 = A(z+3) + B(z-2) = (A+B)z + (3A-2B)$. Somit $A+B = 1$ und $3A - 2B = 1$ mit Lösung $A = \frac{3}{5}$ und $B = \frac{2}{5}$. Also gilt

$$g(z) = 2z + \frac{3}{5}\frac{1}{z-2} + \frac{2}{5}\frac{1}{z+3}.$$

Ein Pol liegt bei $z = 2$ mit $\mathrm{Res}(g(z), 2) = \frac{3}{5}$ und ein Pol bei $z = -3$ mit $\mathrm{Res}(g(z), -3) = \frac{2}{5}$.

(b) Eine komplexe Zahl z liegt genau dann im gegebene Kreis, wenn $|z - (2+i)| \leq 2$. Es gilt $|2 - (2+i)| = 1 < 2$ und $|-3 - (2+i)| = \sqrt{26} > 2$. Also liegt der Pol bei $z = 2$ im Inneren des Kreises, der Pol bei $z = -3$ aber nicht. Wir erhalten aus dem Residuensatz

$$\int_K g(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(g(z), 2) = 2\pi i \frac{3}{5} = \frac{6}{5}\pi i.$$