Klausur Mathematik IV

(E-Techniker)

15. September 2008

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (8 Punkte): Gegeben seien die vier Punkte

$$P_1 = (-1\,|\,-1)\,,\ P_2 = (0\,|\,0)\,,\ P_3 = (1\,|\,2)\,,\ P_4 = (2\,|\,1)\,.$$

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom vom Grad 3 durch $P_1, \ldots, P_4$.

b) Berechnen Sie die Regressionsgerade (Methode der kleinsten Quadrate) zu den Punkten $P_1, \ldots, P_4$.

c) Approximieren Sie die Punkte $P_1, \ldots, P_4$ durch eine quadratische Funktion der Form $a\,x^2 + b\,x + 0,6$ mit der Methode der kleinsten Quadrate.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \cos(x + y) \text{ mit } y(0) = 1\,.$$

Bestimmen Sie mit dem Euler-Cauchy-Verfahren eine Näherungslösung für $y(x)$ an den Stellen $x = 0,1\,;\ 0,2\,;\ 0,3$ und $0,4$.

Aufgabe 3 (8 Punkte): Wie man aus einer Skizze sehen kann, gibt es eine reelle Zahl x im Intervall $(2, 3)$ mit $x = 3 \cdot \sin(x)$.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, bei dem Sie lediglich die vier Grundrechenarten benutzen, um dieses x näherungsweise zu berechnen.

b) Nehmen Sie an, Sie könnten die vier Grundrechenarten beliebig genau durchführen. Geben Sie eine Anzahl von Schritten Ihres Algorithmus an, bei der Sie sicher sein können, dass Sie sich dem gesuchten x bis auf eine Abweichung von 10^{-50} genähert haben. Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig!

c) Führen Sie 4 Schritte Ihres Algorithmus explizit durch.

Aufgabe 4 (6 Punkte): Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

mit dem Cholesky-Verfahren.

Lösungen:
Aufgabe 1: a) Wir berechnen das Interpolationspolynom nach Lagrange:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{x\cdot(x-1)(x-2)}{-1(-1-1)(-1-2)}(-1) + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)}\cdot 0 \\ &\quad + \frac{(x+1)\,x\,(x-2)}{(1+1)\cdot 1(1-2)}\cdot 2 + \frac{(x+1)\,x\,(x-1)}{(2+1)\,2\,(2-1)}\cdot 1 \\ &= \frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x) + (-1)(x^3-x^2-2x) + \frac{1}{6}(x^3-x) \\ &= -\frac{2}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{13}{6}\,x\,. \end{aligned}$$

b) Wir setzen $y = m\,x + b$ und lösen nach m und b auf

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} x_i^2 & \sum_{i=1}^{4} x_i \\ \sum_{i=1}^{4} x_i & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{4} y_i \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $b = \frac{1}{10}$ und $m = \frac{4}{5}$.

c) Wir minimieren $\sum_{i=1} (ax_i^2 + bx_i + 0,6 - y_i)^2$ und erhalten für a und b

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} x_i^4 & \sum_{i=1}^{4} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i^3 & \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i - 0,6\cdot\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i y_i - 0,6\cdot\sum_{i=1}^{4} x_i \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 0,6 \cdot 6 \\ 5 - 0,6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 3,8 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $a = -0,5$ und $b = 1,3$.

Aufgabe 2: Wir lösen $y' = \cos(x + y)$, $y(0) = 1$ mit dem Euler-Cauchy-Verfahren. Die Rekursion lautet $y_j = y_{j-1} + 0,1 \cdot \cos(x_{j-1} + y_{j-1})$. Wir erhalten folgende Lösungstabelle

$x_0 = 0$	$x_1 = 0,1$	$x_2 = 0,2$	$x_3 = 0,3$	$x_4 = 0,4$
$y_0 = 0$	$y_1 = 1,0540$	$y_2 = 1,0945$	$y_3 = 1,1218$	$y_4 = 1,1366$

Aufgabe 3: Wir schwächen die Aufgabenstellung ab, indem wir annehmen, dass wir zusätzlich die trigonometrischen Funktionen ebenfalls beliebig genau berechnen können. In dieser Version wurde die Aufgabe bewertet. Wer die Originalaufgabenstellung löste, indem z.B. die trigonometrischen Funktionen durch Polynome (Taylorreihe) approximiert wurden, erhielt Zusatzpunkte.

Betrachte $f(x) = x - 3\sin(x)$ im Intervall $(2\,,3)$ und suche davon eine Nullstelle mit dem Newton-Verfahren. Wir rechnen $f'(x) = 1 - 3\cos(x)$ und $f''(x) = 3\sin(x)$. Wir sehen, dass $f(2) < 0$, $f(3) > 0$ und $f''(x) > 0$ auf $(2\,,3)$. Somit gibt es eine Nullstelle x in $(2\,,3)$. Wir sehen außerdem $|f''(x)| \leq 2,73$ und $|f'(x)| \geq 2,24$, deshalb gilt für die Rekursion

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 3\sin(x_n)}{1 - 3\cos(x_n)}$$

die Abschätzung $|x_{n+1} - x| \leq 0,61 \cdot |x_n - x|$, was schließlich zu $|x_n - x| \leq 0,61^{2^n - 1} \cdot |x_0 - x|$ führt. Wir wählen $x_0 = 3$. Um $|x_n - x| \leq 10^{-50}$ zu erreichen ist $n \geq 9$ hinreichend.

Für die ersten Werte erhalten wir $x_0 = 3$, $x_1 = 2,350968$, $x_2 = 2,280686$, $x_3 = 2,278863$ und $x_4 = 2,278862$.

Aufgabe 4: Das Cholesky-Verfahren liefert

$$\begin{aligned}
v_{11} &= \sqrt{a_{11}} = 1\,, \\
v_{21} &= \frac{1}{v_{11}}(a_{21} - 0) = \frac{-1}{1} = -1\,, \\
v_{22} &= \sqrt{a_{22} - v_{21}^2} = \sqrt{2-1} = 1\,, \\
v_{31} &= \frac{a_{31}}{v_{11}} = \frac{0}{1} = 0\,, \\
v_{32} &= \frac{1}{v_{22}}(a_{32} - v_{31} \cdot v_{21}) = -1 - 0 \cdot (-1) = -1\,, \\
v_{33} &= \sqrt{a_{33} - v_{31}^2 - v_{32}^2} = \sqrt{2-0-1} = 1\,.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $A = V \cdot V^T$. Wir lösen deshalb $V \cdot y = b$ und $y = V^T \cdot x$ und erhalten als Ergebnis

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$