KLAUSUR

Mathematische Methoden der Signalverarbeitung

16.7.02

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Man gehe von der Korrespondenz ($a > 0$)

$$\mathcal{F}\left(u(t)\, e^{-a\,t}\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{a}{a^2+\omega^2} - \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{i\,\omega}{a^2+\omega^2}$$

aus und begründe die Beziehung:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}\left(u(t)\, e^{-\frac{1}{n}\,t}\right)(\omega) = \mathcal{F}(u(t))(\omega)$$

im Distributionensinn. (Hierbei ist u die Heaviside-Funktion. Ihre Forier-transformierte kann dem Skript entnommen werden). **(8P)**

2. Gegeben sei eine Folge $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit der z-Transformierten $\mathcal{Z}(f_n)(z)$. Man berechne die z-Transformierte der Differenzen:

$$\triangle f_n = f_{n+1} - f_n \quad \text{und} \quad \triangle^2 f_n = \triangle(\triangle f_n) = f_{n+2} - 2\,f_{n+1} + f_n\,.$$

(4P)

3. Ein LTI-System

$$Y(z) = H(z)\,U(z)$$

besitze die Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n}\,, \quad 0 \le r < |z| < R\,, \quad r < 1 < R\,, \quad h(n) \in \mathbb{R}\,.$$

Auf die Eingabe $u(n) = e^{i\,\omega\,n}$ antwortet das System mit der Ausgabe

$$y(n) = H\left(e^{i\,\omega}\right)\, e^{i\,\omega\,n}\,.$$

Man berechne die Antwort auf die harmonische Eingabefolge

$$u(n) = \cos(\omega\,n)$$

und zeige, dass die Antwort die Gestalt annimmt:

$$\left|H\left(e^{i\,\omega}\right)\right|\,\cos(\omega\,n + \varphi(\omega))\,.$$

(6P)

Lösungen

1.) Wir gehen aus von der Korrespondenz ($a > 0$):

$$\mathcal{F}\left(u(t)\, e^{-a\,t}\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{a}{a^2+\omega^2} - \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{i\,\omega}{a^2+\omega^2}$$

und formen den Realteil um:

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{a}{a^2+\omega^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{a}{a^2+\omega^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{a}\,\omega\right)^2}\,.$$

Wenn man den Parameter a durch $\frac{1}{n}$ ersetzt, folgt:

$$\mathcal{F}\left(u(t)\, e^{-\frac{1}{n}\,t}\right)(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\pi}\,n\,\frac{1}{1+(n\,\omega)^2} - \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{i\,\omega}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\omega^2}\,.$$

Im Distributionensinn konvergiert die Funktionenfolge $\dfrac{1}{\pi}\,n\,\dfrac{1}{1+(n\,\omega)^2}$ nun gegen $\delta(\omega)$ und die Folge $\dfrac{\omega}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\omega^2}$ mit einer Hauptwertbetrachtung gegen $\dfrac{1}{\omega}$. Damit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}\left(u(t)\, e^{-\frac{1}{n}\,t}\right)(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\,\delta(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{i}{\omega} = \mathcal{F}(u(t))(\omega)\,.$$

2.) Mit dem Verschiebungssatz für die (einseitige) z-Transformation bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(\triangle f_n)(z) &= \mathcal{Z}(f_{n+1})(z) - \mathcal{Z}(f_n)(z)\\
&= z\,\left(\mathcal{Z}(f_n)(z) - f_0\right) - \mathcal{Z}(f_n)(z)\\
&= (z-1)\,\mathcal{Z}(f_n)(z) - f_0\,z
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(\triangle^2 f_n)(z) &= \mathcal{Z}(\triangle f_{n+1})(z) - \mathcal{Z}(\triangle f_n)(z)\\
&= (z-1)\,\mathcal{Z}(f_{n+1})(z) - f_1\,z - (z-1)\,\mathcal{Z}(f_n)(z) + f_0\,z\\
&= (z-1)\,z\,(\mathcal{Z}(f_n)(z) - f_0) - f_1\,z - (z-1)\,\mathcal{Z}(f_n)(z) + f_0\,z\\
&= (z-1)^2\,\mathcal{Z}(f_n)(z) - f_0\,z\,(z-1) - \triangle f_0\,z\,.
\end{aligned}$$

3.) Wir benutzen den Frequenzgang. Auf die Eingabe $e^{i\,\omega\, n}$ bzw. $e^{-i\,\omega\, n}$ antwortet das System mit der Ausgabe

$$H\left(e^{i\,\omega}\right)\, e^{i\,\omega\, n} \quad \text{bzw.} \quad H\left(e^{-i\,\omega}\right)\, e^{-i\,\omega\, n}\,.$$

Im reellen Fall sind die Koeffizienten der Übertragungsfunktion ebenfalls reell $h(n) \in \mathbb{R}$, und es gilt:

$$H\left(e^{-i\,\omega}\right) = \overline{H\left(e^{i\,\omega}\right)}\,.$$

Mit

$$u(n) = \frac{1}{2}\,\left(e^{i\,\omega\, n} + e^{-i\,\omega\, n}\right)$$

und der Linearität des Systems ergibt sich die Antwort:

$$y(n) = \frac{1}{2}\,\left(H\left(e^{i\,\omega}\right)\, e^{i\,\omega\, n} + H\left(e^{-i\,\omega}\right)\, e^{-i\,\omega\, n}\right)\,.$$

Wenn die Übertragungsfunktion auf dem Einheitskreis keine Nullstelle besitzt, können wir zur Polardarstellung übergehen:

$$H\left(e^{i\,\omega}\right) = \left|H\left(e^{i\,\omega}\right)\right|\, e^{\phi(\omega)}\,, \quad H\left(e^{-i\,\omega}\right) = \left|H\left(e^{i\,\omega}\right)\right|\, e^{-\phi(\omega)}\,,$$

mit dem Argument des Frequenzgangs:

$$\varphi(\omega) = \arg\left(H\left(e^{i\,\omega}\right)\right)\,.$$

Insgesamt ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2}\,\left|H\left(e^{i\,\omega}\right)\right|\,\left(e^{i\,(\omega\, n + \varphi(\omega))} + e^{-i\,(\omega\, n + \varphi(\omega))}\right) \\ &= \left|H\left(e^{i\,\omega}\right)\right|\,\cos(\omega\, n + \varphi(\omega))\,. \end{aligned}$$

Auf die harmonische Erregung $u_n = \cos(\omega\, n)$ antwortet das System also mit der phasenverschobenen harmonischen Folge

$$y_n = \left|H\left(e^{i\,\omega}\right)\right|\,\cos(\omega\, n + \varphi(\omega))\,.$$