KLAUSUR

Mathematische Methoden der Signalverarbeitung

26.2.04

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Man berechne die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(x_n)(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\, e^{-i\,n\,\omega}$. der Folge

$$x_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = 0\,, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = 1\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

und zeige, dass gilt für $N = 2$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| \mathcal{F}(x_n) \left(\omega + \frac{2\,\pi}{N}\, k \right) \right|^2 = N\,.$$

(6P)

2. Die Skalierungsgleichung kann iterativ wie folgt gelöst werden:

$$\phi_{m+1}(n) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, \phi_m(n - 2^m\, k)\,, m \geq 0\,,$$

mit dem Startwert $\phi_0(0) = 1$ und $\phi_0(n) = 0$ sonst.
Als Näherung für $\phi(t)$ wird gesetzt:

$$\phi(\frac{n}{2^m}) = \phi_m(n)\,.$$

Man berechne die ersten beiden Iterierten für ein Filter $h_k = 0$ für $k \neq 0, 1, 2, 3$.

(6P)

3. Die Haar-Multiskalen-Analyse werde geben durch

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t < 1\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,, \end{cases} \qquad \psi(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -1 \leq t < -\frac{1}{2}\,, \\ 1 & , \quad -\frac{1}{2} \leq t < 0\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,, \end{cases}$$

und:

$$h_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = 0\,, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = 1\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,, \end{cases} \qquad g_n = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = -2\,, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = -1\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nehmen die Analyse-Formeln folgende Gestalt an:

$$a_{m+1,k} = h_0\, a_{m,2\,k} + h_1\, a_{m,2\,k+1}\,, \quad d_{m+1,k} = g_{-2}\, a_{m,2\,k-2} + g_{-1}\, a_{m,2\,k-1}\,.$$

Die Projektion eines Signals f in den Raum $\mathbb{V}_0$ sei bekannt: $P_0(f) = \phi\,(t) + 2\,\phi\,(t-1)$.
Wie lautet die Projektion in den Raum $\mathbb{V}_1$:

$$P_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{1,n}\, 2^{-\frac{1}{2}}\, \phi\left(2^{-1}\, t - n\right)$$

und in den Raum $\mathbb{Q}_1$:

$$Q_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{1,n}\, 2^{-\frac{1}{2}}\, \psi\left(2^{-1}\, t - n\right)\,?$$

Man skizziere $P_0(f), P_1(f), Q_1(f)$.
(6P)

Lösungen

1.) Es gilt:

$$\mathcal{F}(x_n)(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-i\,\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + e^{-i\,\omega}\right)\,,$$

$$\mathcal{F}(x_n)(\omega+\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 +\, e^{-i\,(\omega+\pi)}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - e^{-i\,\omega}\right)\,,$$

$$|\mathcal{F}(x_n)(\omega)|^2 = \frac{1}{2}\,(1 + e^{-i\,\omega})\,(1 + e^{i\,\omega}) = \frac{1}{2}\,(1 + e^{-i\,\omega} + e^{i\,\omega} + 1)\,,$$

$$|\mathcal{F}(x_n)(\omega+\pi)|^2 = \frac{1}{2}\,(1 - e^{-i\,\omega})\,(1 - e^{i\,\omega}) = \frac{1}{2}\,(1 - e^{-i\,\omega} - e^{i\,\omega} + 1)\,,$$

also:

$$|\mathcal{F}(x_n)(\omega)|^2 + |\mathcal{F}(x_n)(\omega+\pi)|^2 = 2\,.$$

2.) Wegen $h_k = 0$ für $k \neq 0,1,2,3$ nimmt die Summe die Gestalt an:

$$\phi_{m+1}(n) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{3} h_k\,\phi_m(n - 2^m\,k)\,, m \geq 0\,.$$

Für $m = 0$ bedeutet dies:

$$\phi_1(n) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{3} h_k\,\phi_0(n-k)$$

und für $m = 1$:

$$\phi_2(n) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{3} h_k\,\phi_1(n - 2\,k)\,,$$

Mit dem Startwert $\phi_0(0) = 1$ und $\phi_0(n) = 0$ ergibt sich:

$$\phi_1(n) = \begin{cases} \sqrt{2}\,h_0 & , \quad n = 0\,, \\ \sqrt{2}\,h_1 & , \quad n = 1\,, \\ \sqrt{2}\,h_2 & , \quad n = 2\,, \\ \sqrt{2}\,h_3 & , \quad n = 3\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,, \end{cases}$$

und

$$\phi_2(n) = \begin{cases} 2\,h_0^2 & , \quad n = 0\,, \\ 2\,h_0\,h_1 & , \quad n = 1\,, \\ 2\,h_0\,h_2 + 2\,h_0\,h_1 & , \quad n = 2\,, \\ 2\,h_0\,h_3 + 2\,h_1^2 & , \quad n = 3\,, \\ 2\,h_1\,h_2 + 2\,h_0\,h_2 & , \quad n = 4\,, \\ 2\,h_1\,h_2 + 2\,h_1\,h_3 & , \quad n = 5\,, \\ 2\,h_2^2 + 2\,h_0\,h_3 & , \quad n = 6\,, \\ 2\,h_1\,h_3 + 2\,h_2\,h_3 & , \quad n = 7\,, \\ 2\,h_2\,h_3 & , \quad n = 8\,, \\ 2\,h_3^3 & , \quad n = 9\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,, \end{cases}$$

3.) Wir haben die Analyse-Formeln:

$$a_{m+1,k} = h_0\,a_{m,2\,k} + h_1\,a_{m,2\,k+1}\,, \quad d_{m+1,k} = g_{-2}\,a_{m,2\,k-2} + g_{-1}\,a_{m,2\,k-1}\,,$$

und die Projektion in $\mathbb{V}_0$:

$$P_0(f) = \phi\,(t) + 2\,\phi\,(t)\ ,$$

also:

$$a_{0,0} = 1\,, \quad a_{0,1} = 2\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$a_{1,0} = h_0\,a_{0,0} + h_1\,a_{0,1} = \frac{3}{2}\,\sqrt{2}$$

und

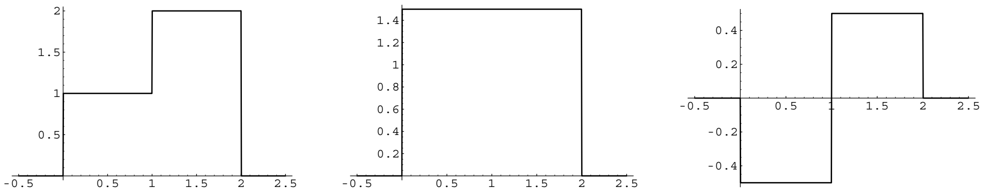
$$d_{1,1} = g_{-2}\,a_{0,0} + g_{-1}\,a_{0,1} = \frac{1}{2}\,\sqrt{2}\,.$$

Alle anderen Approximations-und Detailkoeffizienten verschwinden. Somit ergeben sich folgende Projektionen in die Räume $\mathbb{V}_1$ und $\mathbb{W}_1$:

$$P_1(f) = \frac{3}{2}\,\sqrt{2}\,2^{-\frac{1}{2}}\,\phi\,\left(2^{-1}\,t\right) = \frac{3}{2}\,\phi\left(\frac{t}{2}\right)$$

und

$$Q_1(f) = \frac{1}{2}\,\psi\left(\frac{t}{2} - 1\right)\,.$$



Das projizierte Signal $P_0(f)$ (links) und die Projektionen $P_1(f)$ (Mitte), $Q_1(f)$ (rechts)