KLAUSUR

Mathematische Methoden der Signalverarbeitung

1.3.05

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Man übertrage die Skalierungsgleichung

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \, \phi(2\,t - n)$$

   in den Frequenzbereich. **(6P)**

2. Gegeben sei die Skalierungsfunktion (Haar):

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t < 1 \,, \\ 0 & , \quad \text{sonst} \,. \end{cases}$$

   Wie lauten die Filterkoeffizienten h_n und die Skalierungsgleichung im Frequenzbereich. **(6P)**

3. Sei $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ eine Folge aus $l^2(\mathbb{Z})$, sodass die verschobenen Folgen $\{x_{n-2\,k}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ein orthonormales System bilden: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, \overline{x_{n-2\,k}} = \delta_{k,0}$. Zeigen Sie, dass für die Folge

$$y_n = (-1)^{n-1} \, \overline{x_{-n-1}} \,.$$

   ebenfalls gilt: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \, \overline{y_{n-2\,k}} = \delta_{k,0}$ und ferner: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, \overline{y_{n-2\,k}} = 0$.

   (6P)

Lösungen

1.) Wir übertragen die Skalierungsgleichung

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \, \phi(2\,t-n)\,, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \, \overline{h_{n+2\,k}} = \delta_{k,0}\,,$$

mit der Fouriertransformation in den Frequenzbereich:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\phi(t))(\omega) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \, e^{-\frac{1}{2}\,n\,\omega\,i} \, \frac{1}{2} \, \mathcal{F}(\phi(t)) \left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \, e^{-n\,\frac{\omega}{2}\,i} \right) \mathcal{F}(\phi(t)) \left(\frac{\omega}{2}\right) . \end{aligned}$$

Mit

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \, e^{-n\,\omega\,i}$$

gilt:

$$\mathcal{F}(\phi(t))(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \, \mathcal{F}(\phi(t)) \left(\frac{\omega}{2}\right) .$$

2.) Mit der Skalierungsfunktion

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t < 1\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,. \end{cases}$$

ergibt sich:

$$h_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \, \sqrt{2} \, \phi(2\,t-n)\, dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \, \phi\left(2\,\left(t - \frac{n}{2}\right)\right) \, dt\,.$$

Hieraus folgt:

$$h_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad h_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{2}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Alle anderen Koeffizienten h_n verschwinden. Im Frequenzbereich gilt nun:

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \, \left(1 + e^{-\omega\,i}\right)$$

und

$$\mathcal{F}(\phi(t))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_0^1 e^{-\omega\,i\,t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{i}{\omega}\,\left(e^{-\omega\,i} - 1\right)\,.$$

3.) Die Bedingungen können direkt nachgewiesen werden:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n\,\overline{y_{n-2\,k}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1}\,x_{-n-1}\,(-1)^{n-2\,k-1}\,\overline{x_{-n+2\,k-1}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{2\,n-2\,k-2}\,x_{-n-1}\,\overline{x_{-n+2\,k-1}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{-n-1}\,\overline{x_{-n+2\,k-1}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\,\overline{x_{n+2\,k}}\,.
\end{aligned}$$