KLAUSUR

Mathematische Methoden der Signalverarbeitung

2.3.07

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Wir geben die Folge $\underline{x} = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ vor $x_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = 0\,, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = 1\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und betrachten das System der um gerade Zahlen verschobenen Folgen: $\underline{x}_k = \{x_{k,n}\}_{n=-\infty}^{\infty} = \{x_{n-2k}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Was ergibt sich für das Skalarprodukt $< \underline{x}_k, \underline{x}_j >$? Bildet das System $\underline{x}_k$ eine Basis des Folgenraums $l^2(\mathbb{Z})$?
(6P)

2. Gegeben sei der mexikanische Hut

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\,\sqrt[4]{\pi}}\,(1-t^2)\,e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\sqrt[4]{\pi}}\,\frac{d}{dt}\left(t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\,.$$

Berechnen Sie die (kontinuierliche) Wavelet-Transformierte des Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| \le \frac{1}{2}\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,. \end{cases}$$

bezüglich des mexikanischen Huts. Hinweis: Substitution $\tau = \dfrac{t-b}{a}$.
(6P)

3. Wir betrachten die Haar-Multiskalen-Analyse mit den QMF-Systemen gegeben durch:

$$h_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = 0\,, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = 1\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,, \end{cases} \quad g_n = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = -2\,, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = -1\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Interpretieren Sie den Übergang

$$\phi_{m-1,n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h_{n-2k}}\,\phi_{m,k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{g_{n-2k}}\,\psi_{m,k}$$

für $m = 1$ und $n = 0$ graphisch. Hierbei ist

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t < 1\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,, \end{cases} \quad \text{und} \quad \psi(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -1 \le t < -\frac{1}{2}\,, \\ 1 & , \quad -\frac{1}{2} \le t < 0\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,, \end{cases} \quad .$$

(6P)

1.) Offensichtlich gilt folgende Orthogonalität:

$$< \underline{x}_k, \underline{x}_j >= \delta_{kj} \,.$$

Mit den Folgen $\underline{x}_k$ kann man nur Folgen $\underline{x}$ mit der Eigenschaft erzeugen:

$$x_{2n} = x_{2n+1} \,.$$

Es liegt also keine Basis vor.

2.) Mit der Substitution $\tau = \dfrac{t-b}{a}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(f(t))(a,b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{a}{\sqrt{|a|}} \int_{\frac{-1-2\,b}{2\,a}}^{\frac{1-2\,b}{2\,a}} \psi(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{a}{\sqrt{|a|}} \frac{2}{\sqrt{3}\,\sqrt[4]{\pi}} \; \tau\, e^{-\frac{\tau^2}{2}} \Big|_{\frac{-1-2\,b}{2\,a}}^{\frac{1-2\,b}{2\,a}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left((1-2\,b)\, e^{-\frac{(1-2\,b)^2}{8\,a^2}} + (1+2\,b)\, e^{-\frac{(1+2\,b)^2}{8\,a^2}} \right) .
\end{aligned}$$

3.) Die Übergangsrelation für $n = 0$ lautet:

$$\phi_{m-1,0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h_{-2\,k}}\, \phi_{m,k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{g_{-2\,k}}\, \psi_{m,k} \,.$$

Mit

$$h_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = 0 \,, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = 1 \,, \\ 0 & , \quad \text{sonst} \,, \end{cases} \qquad g_n = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = -2 \,, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad n = -1 \,, \\ 0 & , \quad \text{sonst} \,. \end{cases}$$

gilt:

$$h_{-2\,k} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad k = 0 \,, \\ 0 & , \quad \text{sonst} \,, \end{cases} \quad g_{-2\,k} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} & , \quad k = -1 \,, \\ 0 & , \quad \text{sonst} \,, \end{cases}$$

und somit

$$\phi_{m-1,0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, \phi_{m,0} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, \psi_{m,1} \,.$$

Dies bedeutet

$$2^{-\frac{m-1}{2}}\,\phi\left(2^{-(m-1)}\,t\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,2^{-\frac{m}{2}}\,\phi\left(2^{-m}\,t-1\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,2^{-\frac{m}{2}}\,\psi\left(2^{-m}\,t-1\right)$$

bzw.

$$\phi\left(2^{-(m-1)}\,t\right) = \frac{1}{2}\,\phi\left(2^{-m}\,t\right) - \frac{1}{2}\,\psi\left(2^{-m}\,t-1\right)\ .$$

Schließlich setzten wir $m = 0$:

$$\phi\left(t\right) = \frac{1}{2}\,\phi\left(2^{-1}\,t\right) - \frac{1}{2}\,\psi\left(2^{-1}\,t-1\right)\ .$$