KLAUSUR

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

1.3.2007

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Versuch–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die Differenzialgleichung:

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,.$$

Geben Sie ein erstes Integral an, und lösen Sie das Anfangswertproblem

$$u(s,1) = s^3\,.$$

(8P)

2. Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem für die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, 0 \le t\,,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad u(x,0) = \sin(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(2\,x)\,,$$

mit der Fouriermethode (Superposition) und mit der Methode von d'Alembert.
(8P)

3. Lösen Sie das Dirichlet-Problem durch Separation und Superposition für eine ebene Kreisscheibe $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$:

$$\Delta u(x) = 0\,, \quad x \in D\,, \quad u(R,\varphi) = \sin(2\,\varphi)\,, \quad \varphi \in [0, 2\,\pi]\,.$$

(8P)

Lösungen

1.) Die charakteristische Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

besitzt die allgemeine Lösung:

$$y = c\,x\,.$$

Die Integrationskonstante liefert ein erstes Integral:

$$c = \frac{y}{x}\,.$$

Das Anfangswertproblem

$$u(s,1) = s^3$$

lösen wir durch Anpassen der Funktion $f(c)$

$$u(x,y) = f(c(x,y)) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

und bekommen:

$$f\left(\frac{1}{s}\right) = s^3 \quad \text{bzw.} \quad f(c) = \frac{1}{c^3}\,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$u(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)^3$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

2.) Nach der Fouriermethode bekommen wir folgende Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n\,\cos(c\,n\,t) + D_n\,\sin(c\,n\,t)\right)\,\sin(n\,x)\,,$$

Die Anfangsbedingung verlangt, dass wir die Anfangsfunktionen in eine Sinusreihe entwickeln:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin(n\,x)\,,$$

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,c\,n\,\sin(n\,x)\,.$$

Hieraus folgt

$$C_1 = 1\,, \quad D_2\,c\,2 = 1 \iff D_2 = \frac{1}{2\,c}\,.$$

Alle anderen Fourierkoeffizienten verschwinden.
Nach der Methode von d' Alembert ergibt sich die Lösung:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\,(\sin(x+c\,t)+\sin(x-c\,t)) + \frac{1}{2\,c}\int\limits_{x-c\,t}^{x+c\,t} \sin(2\,\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{2}\,(\sin(x+c\,t)+\sin(x-c\,t)) - \frac{1}{4\,c}\,(\cos(2\,(x+c\,t)) - \cos(2\,(x-c\,t)))\ . \end{aligned}$$

3.) Separation und Superposition ergibt folgende Fourier-Entwicklung der Lösung des Dirichlet-Problems:

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\,(A_n\,\cos(n\,\varphi) + B_n\,\sin(n\,\varphi))\,.$$

Die Koeffizienten werden aus den Fourier-Koeffizienten der Randfunktion bestimmt:

$$A_0 = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\,\pi} f(\varphi)\,d\varphi\,, \quad A_n = \frac{1}{R^n\,\pi}\int\limits_0^{2\,\pi} f(\varphi)\,\cos(n\,\varphi)\,d\varphi\,,$$

$$B_n = \frac{1}{R^n\,\pi}\int\limits_0^{2\,\pi} f(\varphi)\,\sin(n\,\varphi)\,d\varphi\,.$$

Nur der Koeffizient B_2 ist von null verschieden:

$$B_2 = \frac{1}{R^2\,\pi}\int\limits_0^{2\,\pi} \sin(2\,\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{R^2\,\pi}\,\pi = \frac{1}{R^2}\,.$$