KLAUSUR

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

25.2.2008

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Versuch–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die Differenzialgleichung:
$$y\,\frac{\partial u}{\partial x} + x\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,.$$
Geben Sie die allgemeine Lösung an, und die Lösung des Anfangswertproblems
$$u(x,0) = x^3\,, \quad x > 0\,.$$
Geben Sie außerdem eine Konstante der Bewegung für das System:
$$x' = y\,, \quad y' = x\,.$$
(8P)

2. Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem für die eindimensionale Wellengleichung
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, 0 \le t\,,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad u(x,0) = \sin(2\,x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(x)\,,$$
mit der Fouriermethode (Superposition) und mit der Methode von d'Alembert.
(8P)

3. Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung ($c > 0$):
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, 0 \le t\,.$$
Lösen Sie das folgende Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitung in einem Stab endlicher Länge $0 \le x \le \pi\,, 0 \le t$:
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad u(x,0) = \sin(x)\,.$$
(Lösung explizit angeben).
Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem für die Wärmeleitung in einem Stab unendlicher Länge $x \in \mathbb{R}\,, 0 \le t$:
$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \sin(x) & , \quad 0 \le x \le \pi\,, \\ 0 & , \quad \text{sonst}\,. \end{cases}$$
(Nur die Fourierkoeffizienten sollen explizit angegeben werden).
(8P)

Lösungen

1.) Wir bekommen die charakteristische Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\,.$$

Trennung der Veränderlichen führt auf

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

und

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c\,.$$

Ein erstes Integral lautet somit:

$$c(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$$

bzw.

$$c(x,y) = y^2 - x^2\,.$$

Die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung nimmt folgende Gestalt an:

$$u(x,y) = f\left(y^2 - x^2\right)\,.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich zu:

$$u(x,y) = (x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Denn aus $u(x,0) = f(-x^2) = x^3$ folgt mit $-x^2 = s$ bzw. $x = \sqrt{-s}$ die Beziehung $f(s) = (-s)^{\frac{3}{2}}$.
Die Funktion $c(x,y) = y^2 - x^2$ ist eine Konstante der Bewegung. Man kann dies auch direkt sehen:

$$x\,x' = x\,y\,, \quad y\,y' = x\,y\,,$$

also

$$x\,x' - y\,y' = 0\,.$$

2.) Nach der Fouriermethode bekommen wir folgende Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n\,\cos(c\,n\,t) + D_n\,\sin(c\,n\,t)\right)\,\sin(n\,x)\,,$$

Die Anfangsbedingung verlangt, dass wir die Anfangsfunktionen in eine Sinusreihe entwickeln:

$$f(x) = u(x,0) = \sin(2\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin(n\,x)\,,$$

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,c\,n\,\sin(n\,x)\,.$$

Hieraus folgt

$$C_2 = 1\,, \quad D_1\,c = 1 \iff D_1 = \frac{1}{c}\,.$$

Alle anderen Fourierkoeffizienten verschwinden.
Nach der Methode von d' Alembert ergibt sich die Lösung:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\,(\sin(2\,(x+c\,t)) + \sin(2\,(x-c\,t))) + \frac{1}{2\,c}\int_{x-c\,t}^{x+c\,t} \sin(\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{2}\,(\sin(2(x+c\,t)) + \sin(2\,(x-c\,t))) - \frac{1}{2\,c}\,(\cos(x+c\,t) - \cos(x-c\,t)) \\ &= 2\,\cos(2\,c\,t)\,\sin(2\,x) + \frac{1}{c}\,\sin(c\,t)\,\sin(x)\,. \end{aligned}$$

3.) Die Lösung des Anfangsrandwertproblems (Stab endlicher Länge) lautet:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin(n\,x)\,e^{-c^2\,n^2\,t}\,, \quad C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\,\sin(n\,x)\,dx\,.$$

Wir entwickeln gerade die Funktion $\sin(x)$ in eine Sinusreihe. Also gilt $C_1 = 1$.
Alle anderen Fourierkoeffizienten ergeben null, und wir bekommen die Lösung:

$$u(x,t) = \sin(x)\,e^{-c^2\,t}\,.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems (Stab unendlicher Länge) lautet:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\lambda)\,\cos(\lambda\,x) + B(\lambda)\,\sin(\lambda\,x))\,e^{-c^2\,\lambda^2\,t}\,d\lambda\,.$$

Dabei nehmen die Koeffizienten folgende Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
A(\lambda) &= \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\cos(\lambda\,\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin(\xi)\,\cos(\lambda\,\xi)\,d\xi \\
&= \frac{1}{(1-\lambda^2)\,2\,\pi}\,(1+\cos(\lambda\,\pi))\,, \\
B(\lambda) &= \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\sin(\lambda\,\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin(\xi)\,\sin(\lambda\,\xi)\,d\xi \\
&= \frac{1}{(1-\lambda^2)\,2\,\pi}\,\sin(\lambda\,\pi)\,.
\end{aligned}
$$