KLAUSUR

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

2.3.2009

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Versuch–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die Differenzialgleichung:

$$y^3 \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,, \quad x, y > 0\,.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung an, und die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(0, y) = y^2\,.$$

(8P)

2. Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$
$$u(0, t) = g(t)\,, \quad u(l, t) = h(t)\,,$$
$$u(x, 0) = f(x)\,, \quad 0 \le x \le l, 0 \le t\,.$$

Wenden Sie die Laplacetransformation bezüglich t an:

$$\int_0^\infty e^{-s\,t}\, u(x, t)\, dt = U(x, s)\,.$$

Welche Differenzialgleichung ergibt sich für $U(x, s)$?
(8P)

3. Gegeben sei die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Anfangsbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t)\,,$$
$$u(0, t) = u(l, t) = 0\,,$$
$$u(x, 0) = 0\,, \quad 0 \le x \le l, 0 \le t\,.$$

Betrachten Sie den folgenden Lösungsansatz:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\, \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\, x\right)\,.$$

Welche Differenzialgleichung ergibt sich für die Koeffizienten $A_n(t)$? Hinweis: $Q(x, t)$ in eine Sinus-Reihe entwickeln: $Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\, \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\, x\right)$.

(8P)

Lösungen

1.) Wir bekommen die charakteristische Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^3}\,.$$

Trennung der Veränderlichen führt auf

$$\int y^3\,dy = \int x^2\,dx$$

und

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x^3}{3} + c\,.$$

Ein erstes Integral lautet somit:

$$c(x,y) = \frac{y^4}{4} - \frac{x^3}{3}\,.$$

Die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung nimmt folgende Gestalt an:

$$u(x,y) = f\left(\frac{y^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\,.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich zu:

$$u(x,y) = 2\sqrt{\frac{y^4}{4} - \frac{x^3}{3}}\,.$$

Denn aus

$$u(0,y) = f\left(\frac{y^4}{4}\right) = y^2$$

folgt mit

$$\frac{y^4}{4} = s$$

bzw.

$$y^2 = 2\sqrt{s}$$

die Beziehung $f(s) = 2\sqrt{s}$.

2.) Wir behandeln das folgende Anfangsrandwertproblem mit der Laplacetransformation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0,t) = g(t), \quad u(l,t) = h(t),$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l, 0 \le t.$$

Wegen der Anfangsbedingung wenden wir die Laplacetransformation bezglich t an und schreiben:

$$\int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\, dt = U(x,s).$$

Die Laplacetransformierte der Zeitableitung ergibt sich aus dem Differenziationssatz:

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dt = s\, U(x,s) - f(x).$$

Anwenden der Laplacetransformation auf die Differenzialgleichung führt auf das folgende Randwertproblem:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,s) - \frac{1}{c^2}\, s\, U(x,s) = -\frac{1}{c^2}\, f(x),$$

$$U(0,s) = G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt, \quad U(l,s) = H(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t)\, dt.$$

3.) Mit dem Lösungsansatz:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\, x\right)$$

sind die Randbedingungen erfüllt. Die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\, x\right) = 0$$

führt auf:

$$A_n(0) = 0.$$

Wir entwickeln die äußere Wärmequelle in eine Sinus-Reihe durch ungerade Fortsetzung und bekommen:

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\, \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right)\,, \quad q_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l Q(x,t)\, \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right)\,dx\,.$$

Einsetzen in die inhomogene Wärmeleitungsgleichung ergibt nun die Differenzialgleichung:

$$\frac{dA_n}{dt}(t) = -c^2\,\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^2\,A_n(t) + q_n(t)\,, \quad A_n(t)(0) = 0\,.$$

Durch Variation der Konstanten bekommen wir die Lösung:

$$A_n(t) = \left(\int_0^t e^{\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^2\,\tau}\,q_n(\tau)\,d\tau\right)\,e^{-\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right)^2\,t}\,.$$