KLAUSUR

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

7.9.2009

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Versuch–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die Gleichung:

$$-x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

   In welchen Teilgebieten der Ebene ist die Gleichung hyperbolisch, in welchen elliptisch? Geben Sie eine Koordinatentransformation an, die im ersten Qudranten auf die entsprechende Normalform führt.
   (8P)

2. Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad -\infty < x < \infty,\, t \geq 0\,,$$

$$u(x,0) = f(x)\,, \quad -\infty < x < \infty\,,$$

   $f(x) = \sin(x), , 0 \leq x \leq \pi$, und $f(x) = 0$ sonst. Geben Sie die Lösung mithilfe der Fouriertransformation an.
   (8P)

3. Wir betrachten das Dirichlet-Problem auf dem Rechteck $D = \{(x_1, x_2)|\, 0 \leq x_1 \leq 1,\, 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}\}$:

$$\Delta u(x) = 0\,, \quad x \in D\,, \quad u(x) = f(x)\,, \quad x \in \partial(D)\,.$$

   Das Gebiet wird mit einem rechteckigen Gitter überzogen. Gitterpunkte: $(\frac{1}{4}\,k, \frac{1}{4}\,l)$, $k = 0,1,2,3,4$, $l = 0,1,2$. Auf dem Rand gelte: $f(1, \frac{1}{4}) = 1$ und $f = 0$ sonst. Berechnen Sie die Lösung in den Punkten: $P_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $P_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $P_3 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, mit dem Differenzenverfahren.
   (8P)

Lösungen

1.) Wir betrachten die Gleichung:

$$-x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,.$$

Es gilt:

$$a(x,y)=-x\,,\quad b(x,y)=0\,,\quad c(x,y)=y\,,$$

und

$$b(x,y)^2-a(x,y)\,c(x,y)=x\,y\,.$$

Die Gleichung wechselt den Typ. Sie ist im ersten und im dritten Quadranten hyperbolisch und im zweiten und im vierten Quadranten elliptisch.
Wir lösen die Gleichungen

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{b(x,y)-\sqrt{b(x,y)^2-a(x,y)\,c(x,y)}}{a(x,y)}\,\frac{\partial\phi}{\partial y}=0\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\,\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$$

und

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{b(x,y)+\sqrt{b(x,y)^2-a(x,y)\,c(x,y)}}{a(x,y)}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}=0\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}=0\,.$$

Die Koordinatentransformation

$$\tilde{x}=\phi(x,y)\,,\quad\tilde{y}=\psi(x,y)$$

überführt dann die Ausgangsleichung die Normalform

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{y}}=0\,.$$

Wir bekommen

$$\phi(x,y)=2\,\sqrt{x}+2\,\sqrt{y}\,,\quad\phi(x,y)=-2\,\sqrt{x}+2\,\sqrt{y}$$

aus:

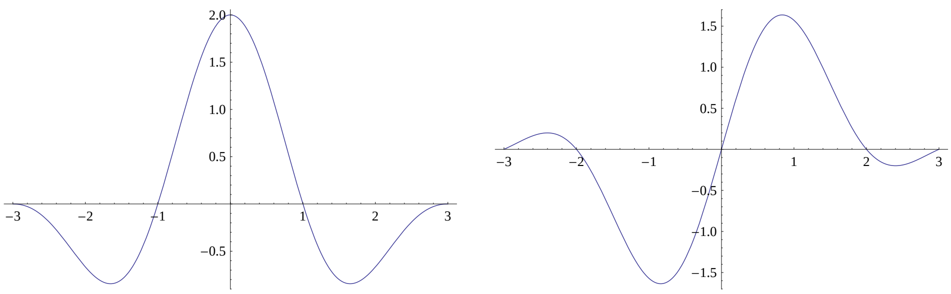
$$\frac{dy}{dx}=\mp\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\quad\Longleftrightarrow\quad 2\,\sqrt{y}=\mp 2\,\sqrt{x}+c\,.$$

2.) Die Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(A(\omega)\,\cos(\omega\,x) + B(\omega)\,\sin(\omega\,x)\right) e^{-c^2\,\omega^2\,t}\,d\omega\,.$$

Dabei nehmen die Koeffizienten folgende Gestalt an:

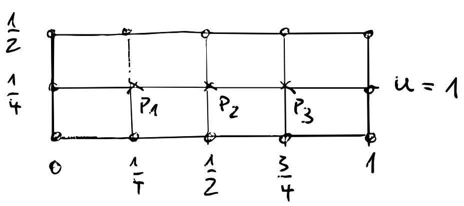
$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\cos(\omega\,\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\,\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(\xi)\,\cos(\omega\,\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1+\cos(\pi\,\lambda)}{1-\lambda^2}\,, \\ B(\omega) &= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\sin(\omega\,\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\,\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(\xi)\,\sin(\omega\,\xi)\,d\xi \\ &= \frac{\sin(\pi\,\lambda)}{1-\lambda^2}\,. \end{aligned}$$



Die Funktion $A(\lambda)$ (links) und die Funktion $B(\lambda)$ (rechts)

3.) Beim Differenzenverfahren haben wir:

$$u(x_1,x_2) = \frac{1}{4}\,(u(x_1+\frac{1}{4},x_2) + u(x_1-\frac{1}{4},x_2) + u(x_1,x_2+\frac{1}{4}) + u(x_1,x_2-\frac{1}{4}))\,.$$



Rechteck D mit Gitterpunkten

Hieraus ergibt sich für die Punkte P_1, P_2, P_3 das folgende System:

$$u(P_1) = \frac{1}{4}\, u(P_2)\,,$$

$$u(P_2) = \frac{1}{4}\, u(P_1) + \frac{1}{4}\, u(P_3)\,,$$

$$u(P_3) = \frac{1}{4}\, u(P_2) + \frac{1}{4}\,.$$

Lösung des Systems:

$$u(P_1) = \frac{1}{14}\,, u(P_2) = \frac{2}{7}\,, u(P_3) = \frac{15}{14}\,.$$