KLAUSUR

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

5.3.2010

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Versuch–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

mit den Anfangsbedingungen: $u(x,0) = 0\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0\,.$ Welchen Typ besitzt die Gleichung? Begründen Sie, dass alle höheren partiellen Ableitungen auf der Anfangskurve $(x,0)$ verschwinden. Welche Lösung ergibt sich für das Anfangswertproblem aus der Potenzreihenentwicklung:
$u(x,y) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{1}{\mu!\,(\nu-\mu)!} \, \frac{\partial^\nu u}{\partial x^\mu \, \partial y^{\nu-\mu}}(0,0)\, x^\mu \, y^{\nu-\mu}$? **(8P)**

2. (a) Wir betrachten die zweidimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,$$

für eine schwingende Membran: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$. Die Funktion:

$$u_{mn}(x,y) = \sin\left(\frac{m\,\pi}{a}\,x\right)\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{b}\,y\right)$$

stellt den räumlichen Anteil einer Eigenschwingung dar. Zeichnen Sie die Knotenlinien der Eigenschwingung für $m = 3, n = 4$.
(b) Wir betrachten das rotationssymmetrische Anfangsrandwertproblem für die zweidimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\,,$$

$$u(1,t) = 0\,, \quad u(r,0) = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = g(r)\,.$$

Beschreiben Sie die Lösung. **(8P)**

3. Welche Lösung besitzt das folgende Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

$u(0,t) = u(l,t) = 0\,, u(x,0) = \sin(\pi\,x)\,, 0 \le x \le l\,, 0 \le t$? **(8P)**

Lösungen

1.) Aus der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

entnehmen wir:

$$a = 1\,, \quad b = \frac{1}{2}\,, \quad c = 1\,,$$

und

$$b^2 - a\,c = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}\,.$$

Die Differenzialgleichung ist elliptisch.
Aus $u(x,0) = 0$ folgt

$$(1) \quad \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,0) = 0\,.$$

Aus $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$ folgt

$$(2) \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^k \partial y}(x,0) = 0\,.$$

Aus (2) folgt mithilfe der Differenzialgleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial^{k+2} u}{\partial x^k \partial y^2}(x,0) = 0\,.$$

Aus der Differenzialgleichung bekommen wir:

$$(4) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0\,, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0\,,$$

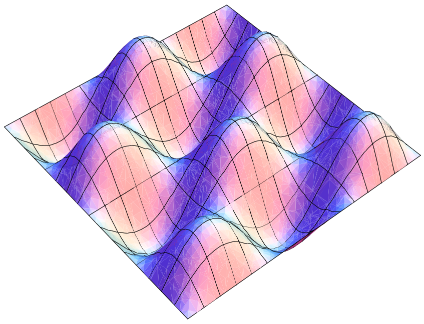
und mit (2) und (3):

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,0) = 0\,, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,0) = 0\,.$$

Diese Überlegungen lassen sich nun leicht fortsetzen. Alle partiellen Ableitungen verschwinden auf der x-Achse.
Aus der Potenzreihenentwicklung ergibt sich die Lösung:

$$u(x,y) = 0\,.$$

2.a)



Die Eigenschwingung für $m = 3, n = 4$.

Die Knotenlinien ergeben sich aus:

$$\sin\left(\frac{3\,\pi}{a}\,x\right) = 0\,, \quad \sin\left(\frac{4\,\pi}{b}\,y\right) = 0\,,$$

bzw.

$$\frac{3\,\pi}{a}\,x = k\,\pi\,, \quad \frac{4\,\pi}{b}\,y = l\,\pi\,, \quad k, l \in \mathbb{N}_0\,.$$

Also:

$$x = \frac{a}{3}\,k\,, \quad y = \frac{b}{4}\,l\,, \quad k = 0, 1, 2, 3\,, l = 0, 1, 2, 3, 4\,.$$

2.b) Mit den positiven Nullstellen der Bessel-Funktion J_0 bekommen wir folgende Lösung:

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,\sin(\alpha_n\,t)\,J_0(\alpha_n\,r)\,, \quad D_n = \frac{\int_0^1 r\,J_0(\alpha_n\,r)\,g(r)\,dr}{\alpha_n\,\int_0^1 r\,(J_0(\alpha_n\,r))^2\,dr}\,.$$

3.) Zunächst muss $l \in \mathbb{N}$ sein, sonst sind für $t = 0$ die Randbedingungen nicht erfüllt. Durch Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin(\frac{n}{l}\,\pi\,x)\,e^{-\frac{n^2}{l^2}\,\pi^2\,t}$$

erfüllen wir die Anfangsbedingung:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin(\frac{n}{l}\,\pi\,x) = \sin(\pi\,x)\,.$$

Wir entwickeln also die Anfangstemperatur $\sin(\pi\, x)$ in eine Sinusreihe. Offenbar gilt (bei $l \in \mathbb{N}$):

$$C_l = 1 \quad \text{und} \quad C_n = 0\,, \quad n \neq l\,.$$

Damit ergibt sich folgende Lösung des Anfangsrandwertproblems:

$$u(x,t) = \sin(\pi\, x)\, e^{-\pi^2\, t}\,.$$