KLAUSUR

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

14.3.2011

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Versuch–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Geben Sie eine Koordinatentransformation an, welche die Gleichung

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

in die folgende hyperbolische Normalform überführt:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} = 0\,.$$

(8P)

2. Lösen Sie das folgende Anfangsrandwertproblem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,$$

$$u(x,y,t) = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, x = 1, y = 0, y = 1\,,$$

$$u(x,y,0) = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = x\,y\,(x-1)\,(y-1)\,,$$

(für $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq t$).
Die Fourierkoeffizienten müssen nicht explizit angegeben werden.
(8P)

3. Lösen Sie das folgende Problem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,,$$

$$u(0,0,z) = g(z)\,, \quad z \geq 0\,,$$

mit dem Ansatz:

$$u(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, r^n\, P_n(\cos(\vartheta))\,.$$

Dabei sind $0 < r\,, 0 \leq \vartheta \leq \pi\,, 0 \leq \varphi < 2\,\pi$ Kugelkoordinaten

$$x = r\,\sin(\vartheta)\,\cos(\varphi)\,, y = r\,\sin(\vartheta)\,\sin(\varphi)\,, z = r\,\cos(\vartheta)\,,$$

und P_n die Legendre-Polynome, $P_n(1) = 1$.
(8P)

Lösungen

1.) Die Differenzialgleichung: $a(x,y)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,b(x,y)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ist hyperbolisch, wenn: $b(x,y)^2 - a(x,y)\,c(x,y) > 0$. Funktionen $\phi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ liefern die gesuchten Koordinatentransformationen, wenn sie die Gleichungen lösen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{b(x,y) - \sqrt{b(x,y)^2 - a(x,y)\,c(x,y)}}{a(x,y)}\,\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

und

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{b(x,y) + \sqrt{b(x,y)^2 - a(x,y)\,c(x,y)}}{a(x,y)}\,\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0\,.$$

Es gilt:

$$a(x,y) = -1\,,\, b(x,y) = 1\,,\, c(x,y) = 2\,,$$
$$(b(x,y))^2 - a(x,y)\,c(x,y) = 3\,,$$

und wir haben eine hyperbolische Gleichung. Wir bestimmen die Koordinatentransformation aus

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(-1+\sqrt{3}\right)\,\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(-1-\sqrt{3}\right)\,\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0\,.$$

Die charakteristischen Gleichungen lauten:

$$\frac{dy}{dx} = -1+\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -1-\sqrt{3}\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\phi(x,y) = y + (1-\sqrt{3})\,x\,, \qquad \text{und} \quad \psi(x,y) = y + (1+\sqrt{3})\,x\,.$$

2) Die Lösung erhält man durch Superposition:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(C_{mn}\,\cos(\lambda_{mn}\,t) + D_{mn}\,\sin(\lambda_{mn}\,t))\,\sin\left(m\,\pi\,x\right)\,\sin\left(n\,\pi\,y\right)\,.$$

Die Anfangsauslenkung und die Anfangsgeschwindigkeit entwickeln wir in eine zweifache Fourierreihe:

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\,\sin\left(m\,\pi\,x\right)\,\sin\left(n\,\pi\,y\right)$$

und

$$g(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \, \lambda_{mn} \, \sin(m\,\pi\,x)\, \sin(n\,\pi\,y) \,, \quad \lambda_{mn} = \pi\,\sqrt{m^2+n^2} \,.$$

Die Fourierkoeffizienten ergeben sich durch zweifache Integration:

$$\begin{aligned} C_{mn} &= 4 \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin(m\,\pi\,x)\, \sin(n\,\pi\,y)\, dx\, dy = 0 \,, \\ D_{mn} &= \frac{4}{\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x,y)\, \sin(m\,\pi\,x)\, \sin(n\,\pi\,y)\, dx\, dy \,. \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten

$$D_{mn} = \frac{4}{\pi\,\sqrt{m^2+n^2}} \int_0^1 \int_0^1 g(x,y) \sin(m\,\pi\,x)\, \sin(n\,\pi\,y)\, dx\, dy$$

bekommt man:

$$\begin{aligned} D_{2\,m+1,2\,n+1} &= \frac{4}{\pi\,\sqrt{m^2+n^2}} \left(\int_0^1 x\,(x-1)\, \sin((2\,m+1)\,\pi\,x)\, dx \right) \\ &\quad \left(\int_0^1 y\,(y-1)\, \sin((2\,n+1)\,\pi\,y)\, dy \right) \\ &= \frac{4}{\pi\,\sqrt{m^2+n^2}} \left(-\frac{4}{(2\,m+1)^3\,\pi^3} \right) \left(-\frac{4}{(2\,n+1)^3\,\pi^3} \right) \\ &= \frac{1}{\pi\,\sqrt{m^2+n^2}} \, \frac{1}{(2\,m+1)^3\,(2\,n+1)^3} \, \frac{64}{\pi^6} \,. \end{aligned}$$

Alle anderen Koeffizienten ergeben Null.

3) Die Funktion:

$$u(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, r^n\, P_n(\cos(\vartheta))$$

stellt eine Lösung der Potenzialgleichung in Kugelkoordinaten dar. Auf der positiven z-Achse ist $z = r$ und $\vartheta = 0$, und wir schreiben:

$$u(r,0,\varphi) = g(r) \,.$$

vor. Wir suchen eine Lösung der Potenzialgleichung $\Delta u = 0$ mit $u = g$ auf der positiven z-Achse. Die Randbedingung bedeutet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \, r^n \, P_n(1) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \, r^n = g(r) \, .$$

Wir müssen also die Funktion g in eine Taylorreihe entwickeln und bekommen:

$$C_n = \frac{1}{n!} \, \frac{d^n g}{dr^n}(0) \, .$$