KLAUSUR

Spezielle Funktionen für Ingenieure

17.7.02

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3

Punkte:	Note:

1. Die Tschebyscheff-Polynome werden für $n = 1, 2, ...$ gegeben durch:

$$T_n(x) = \frac{\cos(n\,\theta)}{2^{n-1}}\,, \quad x = \cos(\theta)\,, \quad \theta \in [0, \pi]\,.$$

   Man zeige, dass für alle $m, n = 1, 2, ...$ gilt:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, T_m(x)\, T_n(x)\, dx = \frac{1}{2^{m+n-1}}\, \pi\, \delta_{m,n}\,.$$

   (6P)

2. Die Hermite-Polynome H_n, $n = 0, 1, 2, ...$, werden gegeben durch die erzeugende Funktion:

$$e^{2\,t\,x - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n\,.$$

   Durch partielle Ableitung nach x bzw. nach t leite man folgende Formeln her:

$$2\,n\,H_{n-1}(x) = H_n'(x)\,, \quad 2\,x\,H_n(x) = 2\,n\,H_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)\,, \quad n \geq 1\,.$$

   (6P)

3. Ist H_n ein Hermite-Polynom, so stellt die Funktion

$$u_n(x,t) = t^{\frac{n}{2}}\, H_n\left(\frac{i}{2}\, x\, t^{-\frac{1}{2}}\right)$$

   eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   dar. Man gebe u_n, $n = 0, 1, 2, 3$ explizit an und begründe mithilfe der Darstellung

$$H_n(x) = (2\,x)^n - \binom{n}{2}\,(2\,x)^{n-2} + \cdots + (-1)^\nu \binom{n}{2\,\nu}\,\frac{(2\,\nu)!}{\nu!}\,(2\,x)^{n-2\,\nu} + \cdots\,,$$

   dass die u_n Polynome in den Variablen x und t sind.
   (6P)

Lösungen:

1.) Mit der Substitution

$$x = \cos(\theta)\,, \quad \theta \in (0, \pi)\,, \quad \sin(\theta) > 0\,, \quad dx = -\sin(\theta)\,d\theta\,,$$

nimmt das Integral folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,T_m(x)\,T_n(x)\,dx &= \int_{\pi}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-(\cos(\theta))^2}}\,\frac{\cos(m\,\theta)}{2^{m-1}}\,\frac{\cos(n\,\theta)}{2^{n-1}}\,(-\sin(\theta))\,d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos(m\,\theta)\;\cos(n\,\theta)\frac{1}{2^{m+n-2}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2^{m+n-2}} \int_{0}^{\pi} \cos(m\,\theta)\;\cos(n\,\theta)\,d\theta\,.
\end{aligned}$$

Aus

$$\int_{0}^{\pi} \cos(m\,\theta)\;\cos(n\,\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (\cos((m-n)\,\theta) + \cos((m+n)\,\theta)\,d\theta$$

folgt:

$$\int_{0}^{\pi} \cos(m\,\theta)\;\cos(n\,\theta)\,d\theta = 2\,\pi\,\delta_{m,n}$$

und die Behauptung.

2.) Durch partielle Ableitung nach x ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{2\,t\,x - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!}\,t^n\,.$$

Andererseits gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{2\,t\,x - t^2} = 2\,t\,e^{2\,t\,x-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,H_n(x)}{n!}\,t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,n\,H_{n-1}(x)}{n!}\,t^n\,.$$

Durch Koeffizientenvergleich bekommt man mit $H_0'(x) = 0$:

$$2\,n\,H_{n-1}(x) = H_n'(x)\,.$$

Partielle Ableitung nach t ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{2\,t\,x - t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!}\, t^{n-1}\,.$$

Andererseits gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{2\,t\,x - t^2} = 2\,(x-t)\, e^{2\,t\,x-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,x\,H_n(x)}{n!}\, t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,H_n(x)}{n!}\, t^{n+1}\,.$$

Durch Koeffizientenvergleich bekommt man wie oben:

$$2\,x\,H_n(x) = 2\,n\,H_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)\,.$$

3) Mit $H_0(x) = 1$ kann man die Polynome aus der Rekursionsformel

$$H_n(x) = 2\,x\,H_{n-1}(x) - H_{n-1}'(x)$$

aufbauen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1\,, \\ H_1(x) &= 2\,x\,, \\ H_2(x) &= 4\,x^2 - 2\,, \\ H_3(x) &= 8\,x^3 - 12\,x\,, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= 1\,, \\ u_1(x,t) &= i\,x\,, \\ u_2(x,t) &= -(x^2 + 2\,t)\,, \\ u_3(x,t) &= i\,(x^3 - 6\,x\,t)\,. \end{aligned}$$

Aus der Darstellung

$$H_n(x) = (2\,x)^n - \binom{n}{2}\,(2\,x)^{n-2} + \binom{n}{4}\,\frac{4!}{2!}\,(2\,x)^{n-4} + \cdots + (-1)^\nu\,\binom{n}{2\,\nu}\,\frac{(2\,\nu)!}{\nu!}\,(2\,x)^{n-2\,\nu} + \cdots$$

erhält man sofort die Behauptung. Die Funktionen setzen sich aus Termen der Gestalt zusammen:

$$c_n\,t^{\frac{n}{2}}\,\left(2\,\frac{i}{2}\,x\,t^{\frac{n}{2}}\right)^{n-2\,\nu} = c_n\,i^n\,i^{-2\,\nu}\,x^{n-2\,\nu}\,t^\nu = c_n\,i^n\,(-1)^\nu\,x^{n-2\,\nu}\,t^\nu\,.$$