KLAUSUR

Tensorrechnung für Ingenieure

21.7.1999

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 10 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3a)	3b)

Punkte:	Note:

1. Gegeben seien die Tensoren $T = t_{ij}\, \underline{g}^i \otimes \underline{g}^j$, $\quad U = u^k\, \underline{g}_k$, $\quad V = v_l\, \underline{g}^l$.
   Man verjünge das Produkt $U \otimes V$ einmal und das Produkt $T \otimes U \otimes U$ zweimal. Die so enstehenden Tensoren 0-ter Stufe sollen mit Hilfe eines Matrizenprodukts geschrieben werden.
   (6P)

2. Gegeben sei der Tensor $T = t^{ij}\, \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j$.
   Man berechne das verjüngende Produkt
   $$T \cdot \underline{n} \quad \text{mit} \quad \underline{n} = n^k\, \underline{g}_k \,.$$
   Mit einer 3×3-Matrix M schreibe man die Bedingung
   $$T \cdot \underline{n} = \lambda\, \underline{n}$$
   in der Form
   $$M \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,.$$
   Wie lautet die Matrix M, wenn folgende kovariante Basis gewählt wird:
   $$\begin{aligned} \underline{g}_1 &= \sin\theta\, \cos\phi\, \underline{e}_1 + \sin\theta\, \sin\phi\, \underline{e}_2 + \cos\theta\, \underline{e}_3 \,, \\ \underline{g}_2 &= r\, \cos\theta\, \cos\phi\, \underline{e}_1 + r\, \cos\theta\, \sin\phi\, \underline{e}_2 - r\, \sin\theta\, \underline{e}_3 \,, \\ \underline{g}_3 &= -r\, \sin\theta\, \sin\phi\, \underline{e}_1 + r\, \sin\theta\, \cos\phi\, \underline{e}_2 \,. \end{aligned}$$
   (6P)

3. Seien r, ϕ, z mit $0 < r$, $0 \le \phi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ Zylinderkoordinaten:
   $$x_1 = r\cos(\phi)\,, \quad x_2 = r\sin(\phi)\,, \quad x_3 = z\,.$$
   (a) Man beschreibe die Koordinatenlinien durch einen beliebigen Punkt und gebe die den Zylinderkoordinaten entsprechende Basis $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$ des Tangentialraums an.
   (b) Man bestimme die kontravariante Basis $\underline{g}^1, \underline{g}^2, \underline{g}^3$ und die Koordinaten g_{ij} des Metriktensors
   $$g_{ij}\, \underline{g}^i \otimes \underline{g}^j \,.$$
   Durch $r(t) = r_0\,, \phi(t) = \phi_0\, t\,, z(t) = z_0\, t\,,\ 0 \le t \le 1$ wird eine Kurve beschrieben. Wie groß ist die Länge dieser Kurve?
   (8P)

Lösungen

1.) Wir bilden das Produkt:

$$U \otimes V = u^k \, \underline{g}_k \otimes v_l \, \underline{g}^l = u^k \, v_l \, \underline{g}_k \otimes \underline{g}^l \, .$$

Verjüngt man über die Indizes k und l, so ergibt sich der folgende Tensor 0-ter Stufe (Skalar):

$$u^k \, v_k \, .$$

Aus den Koordinaten von U und V ergibt sich die Koordinatendarstellung des verjüngten Tensors als Matrizenprodukt:

$$u^k \, v_k = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \, .$$

Wir bilden das Produkt:

$$T \otimes U \otimes U = t_{ij} \, \underline{g}^i \otimes \underline{g}^j \otimes u^k \, \underline{g}_k \otimes u^l \, \underline{g}_l = t_{ij} \, u^k \, u^l \, \underline{g}^i \otimes \underline{g}^j \, \underline{g}_k \otimes \underline{g}_l \, .$$

Verjüngen über die Indizes i und k ergibt den Tensor erster Stufe:

$$t_{ij} \, u^i \, u^l \, \underline{g}^j \otimes \underline{g}_l \, .$$

Verjüngen über die Indizes j und l ergibt den Tensor nullter Stufe:

$$t_{ij} \, u^i \, u^j \, .$$

Verjüngt man zuerst über die Indizes i und l, so ergibt sich der Tensor erster Stufe:

$$t_{ij} \, u^k \, u^i \, \underline{g}^j \otimes \underline{g}_k \, .$$

Verjüngt man dann über die Indizes j und k, so ergibt sich der Tensor nullter Stufe:

$$t_{ij} \, u^j \, u^i \, .$$

In beiden Fällen ergibt sich die Koordinatendarstellung des verjüngten Tensors als Matrizenprodukt:

$$t_{ij} \, u^j \, u^i = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \, .$$

2.) Das verjüngende Produkt ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} T \cdot \underline{n} &= \left(t^{ij}\, \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j\right) \cdot \left(n^k\, \underline{g}_k\right) \\ &= \left(t^{ij}\, \underline{g}_i\right) \left(\underline{g}_j \cdot n^k\, \underline{g}_k\right) \\ &= t^{ij}\, \underline{g}_j \cdot \underline{g}_k\, n^k\, \underline{g}_i \\ &= t^{ij}\, g_{jk}\, n^k\, \underline{g}_i\,. \end{aligned}$$

Die Eigengleichung $T \cdot \underline{n} = \lambda\, \underline{n}$ nimmt folgende Gestalt an:

$$t^{ij}\, g_{jk}\, n^k\, \underline{g}_i = \lambda\, n^i\, \underline{g}_i$$

bzw.

$$t^{ij}\, g_{jk}\, n^k - \lambda\, n^i = 0$$

für $i = 1, 2, 3$. Mit der Einheitsmatrix schreibt man:

$$\left(t^{ij}\, g_{jk} - \lambda\, \delta^i_k\right)\, n^k = 0\,.$$

Man bekommt also die Matrix

$$M = (t^{ij})\,(g_{jk}) - \lambda\,(\delta^i_k)\,.$$

Bei der angegebenen kovarianten Basis handelt es sich um die den Kugelkoordinaten entsprechende Basis des Tangeltialraums. Bildet man die skalaren Produkte, so ergibt sich:

$$(t^{ij}) = (\underline{g}_i \cdot \underline{g}_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\, \sin(\theta) \end{pmatrix}\,.$$

Damit ergibt sich das Matrizenprodukt

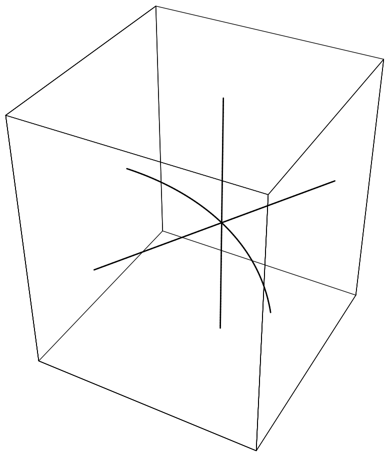
$$(t^{ij})\,(g_{jk}) = \begin{pmatrix} t^{11} & r^2\, t^{12} & r^2\, \sin(\theta)\, t^{13} \\ t^{21} & r^2\, t^{22} & r^2\, \sin(\theta)\, t^{23} \\ t^{31} & r^2\, t^{32} & r^2\, \sin(\theta)\, t^{33} \end{pmatrix}$$

und

$$M = \begin{pmatrix} t^{11} - \lambda & r^2\, t^{12} & r^2\, \sin(\theta)\, t^{13} \\ t^{21} & r^2\, t^{22} - \lambda & r^2\, \sin(\theta)\, t^{23} \\ t^{31} & r^2\, t^{32} & r^2\, \sin(\theta)\, t^{33} - \lambda \end{pmatrix}\,.$$

3.a) Die Koordinatenlinien durch einen Punkt mit den Koordinaten (r, ϕ, z) lauten:

$$\begin{aligned}
\underline{R}_1(t) &= (r+t)\ \cos(\phi)\, \underline{e}_1 + (r+t)\ \sin(\phi)\, \underline{e}_2 + z\, \underline{e}_3\,, \\
\underline{R}_2(t) &= r\ \cos(\phi+t)\, \underline{e}_1 + r\ \sin(\phi+t)\, \underline{e}_2 + z\, \underline{e}_3\,, \\
\underline{R}_2(t) &= r\ \cos(\phi)\, \underline{e}_1 + r\ \sin(\phi)\, \underline{e}_2 + (z+t)\, \underline{e}_3\,.
\end{aligned}$$



Die Koordinatenlinien
$\underline{R}_1(t), \underline{R}_2(t), \underline{R}_3(t)$

Daraus ergeben sich folgende Basisvektoren des Tangentialraums:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\underline{R}_1(t)}{dt}\right|_{t=0} = \underline{g}_1(r,\phi,z) &= \cos(\phi)\, \underline{e}_1 + \sin(\phi)\, \underline{e}_2\,, \\
\left.\frac{d\underline{R}_2(t)}{dt}\right|_{t=0} = \underline{g}_2(r,\phi,z) &= -r\ \sin(\phi)\, \underline{e}_1 + r\ \cos(\phi)\, \underline{e}_2\,, \\
\left.\frac{d\underline{R}_3(t)}{dt}\right|_{t=0} = \underline{g}_3(r,\phi,z) &= \underline{e}_3\,.
\end{aligned}$$

3.b) Die Vektoren der kovarianten Basis stehen paarweise senkrecht und es gilt

$$||\underline{g}_1(r,\phi,z)|| = 1\,, \quad ||\underline{g}_2(r,\phi,z)|| = r\,, \quad ||\underline{g}_3(r,\phi,z)|| = 1\,.$$

damit erhält man sofort die zugehörige kontravariante Basis:

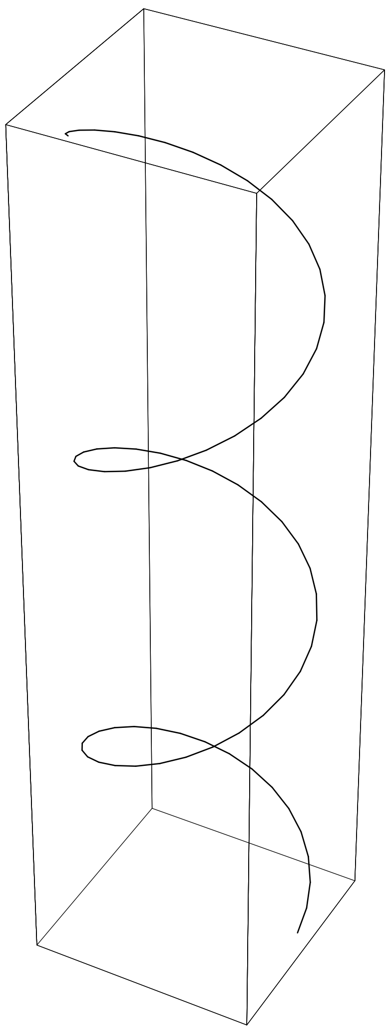
$$\overline{g}_1(r,\phi,z) = \underline{g}_1(r,\phi,z)\,, \overline{g}_2(r,\phi,z) = \frac{1}{r}\,\underline{g}_2(r,\phi,z)\,, \overline{g}_3(r,\phi,z) = \underline{g}_3(r,\phi,z)\,.$$

Bildet man die skalaren Produkte, so ergeben sich die Metrikkoef£zienten:

$$(g_{ij}(r, \phi, z)) = (\underline{g}_i(r, \phi, z) \cdot \underline{g}_j(r, \phi, z)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Für die Länge einer Kurve $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ gilt allgemein:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g_{ij}(\xi(t)) \, \frac{d\xi^i(t)}{dt} \, \frac{d\xi^j(t)}{dt}} \, dt$$



Die Kurve
$r = r_0, \phi = \phi_0 \, t, z = z_0 \, t$

Mit

$$\begin{aligned}\frac{d\xi^1(t)}{dt} &= \frac{dr(t)}{dt} = 0\,,\\ \frac{d\xi^2(t)}{dt} &= \frac{d\phi(t)}{dt} = \phi_0\,,\\ \frac{d\xi^3(t)}{dt} &= \frac{dz(t)}{dt} = z_0\,,\end{aligned}$$

ergibt sich

$$g_{ij}(\xi(t))\,\frac{d\xi^i(t)}{dt}\,\frac{d\xi^j(t)}{dt} = r_0^2\,\phi_0^2 + z_0^2$$

und die Länge der Kurve

$$\int\limits_0^1 \sqrt{r_0^2\,\phi_0^2 + z_0^2}\,dt = \sqrt{r_0^2\,\phi_0^2 + z_0^2}\,.$$